C A P I T U L O IV

ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES

4.1.

Sabemos que una E.D. Lineal de orden n es una ecuación de la forma

$$a_0(x)\,\frac{d^n y}{dx^n} + a_1(x)\,\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + a_{n-1}(x)\,\frac{dy}{dx} + a_n(x)\,y = h(x)$$

donde $a_i(x)$ $i=0,1,2,\ldots\ldots,n$,$h(x)$ son continuas en un intervalo I y además se cumple que $a_0(x) \neq 0$ para todo x de I.

Las funciones $a_i(x)$ $i=0,1,2,\ldots,n$ son llamadas coeficientes de la E.D.

Def.4.1.1.- Si en la E.D. anterior se tiene que $h(x) = 0$,la E.D. Lineal es llamada homogénea.

Def.4.1.2.- Si en la E.D. anterior se tiene que $h(x) \neq 0$,la E.D. resultante la llamaremos E.D. Lineal no Homogénea.

Nota.4.1.1.- Observe que una E.D. L. Homogénea siempre tiene la función $y = 0$ como una de sus soluciones.Esta solución es llamada solución trivial.

Surge entonces la siguiente pregunta:Las E.D. Lineales con condiciones iniciales tienen solución única?La respuesta a esta pregunta nos la dan los siguientes teoremas que enunciaremos sin demostración.

Teorema.4.1.1.- Sean las funciones $a_0(x),a_1(x),\ldots\ldots\ldots,a_n(x)$ y $h(x)$ continuas en el intervalo $I = [a,b]$ donde $a_0(x) \neq 0$ para todo x de I. Sea x_0 un punto de I y sean $y_0, y_0', \ldots\ldots\ldots\ldots, y_0^{n-1}$ números reales.Entonces existe solución única $y = y(x)$ que satisface la E.D. Lineal

$$a_0(x)\,\frac{d^n y}{dx^n} + a_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \ldots\ldots\ldots + a_{n-1}(x)\,\frac{dy}{dx} + a_n(x)y = h(x)$$

para cada x de I y para la cual

$$y_0=y(x_0),\, y_0'=y'(x_0), \ldots\ldots\ldots\ldots, y_0^{n-1} = y^{(n-1)}(x_0)$$

Nota.4.1.2.- Este teorema es válido cuando I es un intervalo abierto pues siempre existe un intervalo abierto totalmente contenido en un intervalo cerrado.

Ej.4.1.1.- Demostrar que la E.D. Lineal

$$x^3y''' - 3x^2y'' + 6xy' - 6y = 2x^4$$

con las siguientes condiciones $y(1) = 0, y'(1) = 1$ y $y''(1) = -2$ tiene solución única en el intervalo $0 < x < \infty$.

Una forma de encontrar el intervalo I de que se habla en la Def de lo que es una E.D.L es la siguiente:

$a_0(x) = x^3$, $a_1(x) = -3x^2$, $a_2(x) = 6x$, $a_3(x) = -6$ y $h(x) = 2x^4$

estas funciones son polinómicas y por tanto el dominio de definición de cada una de ellas es el conjunto de los Reales pero allí $a_0(x) = 0$ para $x = 0$ por tanto el intervalo I es $(-\infty,0) \cup (0,\infty)$. En este conjunto todas las funciones son continuas así que con mayor razón en $(0,\infty)$. El punto $x_0 = 1$ está en $(0,\infty)$. Lo anterior implica que se satisfacen las condiciones del Teorema 4.1.1. y por tanto la E.D. dada tiene solución única que es dada por la siguiente expresión

$$y(x) = -\frac{10}{3}x + 6x^2 - 3x^3 + \frac{1}{3}x^4$$

Teorema.4.1.2.- Sean las funciones $a_0(x), a_1(x), \ldots\ldots\ldots, a_n(x)$ continuas en el intervalo $I = [a,b]$ donde $a_0(x) \neq 0$ para cada x de I. Sea x_0 un punto de I. Sea $y=y(x)$ una solución de la E.D. L. Homogénea

$$a_0(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \ldots\ldots\ldots + a_{n-1}(x)\frac{dy}{dx} + a_n(x)y = 0$$

que satisface las siguientes condiciones

$$y(x_0) = 0,\ y'(x_0) = 0, \ldots\ldots\ldots\ldots, y^{(n-1)}(x_0) = 0$$

Entonces $y(x) = 0$ para cada x de I.

4.2. OPERADORES LINEALES

Def.4.2.1.- Un operador A es una función que transforma funciones en funciones.

Ej.4.2.1.- Lo que entendemos por derivada no es más que un operador pues envía funciones en funciones.

Ej.4.2.2.- El integral, ya sea definido o indefinido, es un operador pues envía funciones en funciones. Nótese que si el integral es definido, todas las funciones las envía en funciones constantes en los reales.

Def.4.2.2.- A es un operador Lineal si para dos funciones cualesquiera y_1, y_2 $A[y_1]$, $A[y_2]$ estan definidas y para dos constantes cualesquiera C_1, C_2, $A[C_1y_1 + C_2y_2]$ está definido y se cumple que

$$A[C_1y_1 + C_2y_2] = C_1\,A[y_1] + C_2\,A[y_2]$$

Ej.4.2.3.- El operador A definido por

$$A[u] = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \qquad (\mathbb{R}^3)$$

es un operador lineal

Sean u_1, u_2 dos funciones para las cuales $A[u_1]$, $A[u_2]$ estan definidas y C_1, C_2 dos constantes cualesquiera. Entonces

$$\begin{aligned}
A[C_1u_1 + C_2u_2] &= \frac{\partial^2}{\partial x^2}(C_1u_1 + C_2u_2) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}(C_1u_1 + C_2u_2) + \frac{\partial^2}{\partial z^2}(C_1u_1 + C_2u_2)\\
&= \frac{\partial^2(C_1u_1)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2(C_2u_2)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2(C_1u_1)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2(C_2u_2)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2(C_1u_1)}{\partial z^2} + \frac{\partial^2(C_2u_2)}{\partial z^2}\\
&= C_1\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + C_2\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} + C_1\frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} + C_2\frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2} + C_1\frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2} + C_2\frac{\partial^2 u_2}{\partial z^2}\\
&= C_1\left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2}\right) + C_2\left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial z^2}\right)\\
&= C_1\,A[u_1] + C_2\,A[u_2]
\end{aligned}$$

Luego A es lineal.

El operador A definido en este ejemplo es el <u>operador Laplaciano</u> definido en el sistema de coordenadas de tres dimensiones (R^3).

Def.4.2.3.- Sean A y B dos operadores, el operador suma A + B definido por

$$(A + B)[u] = A[u] + B[u]$$

está definido para todas las funciones u para las cuales $A[u]$ y $B[u]$ estan definidas.

Ej.4.2.4.- Sean A y B los siguientes operadores

$$A[u] = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

$$B[u] = x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} + z\frac{\partial u}{\partial z}$$

entonces el operador suma A + B está definido por

$$\begin{aligned}
(A + B)[v] &= A[v] + B[v]\\
&= \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + x\frac{\partial v}{\partial x} + y\frac{\partial v}{\partial y} + z\frac{\partial v}{\partial z}
\end{aligned}$$

Teorema.4.2.1.- Sean A y B operadores lineales. Entonces el operador suma $A + B$ es tambien un operador lineal.

Prueba. $(A+B)[C_1u_1 + C_2u_2] = A[C_1u_1 + C_2u_2] + B[C_1u_1 + C_2u_2]$ por def.

$= C_1A[u_1] + C_2A[u_2] + C_1B[u_1] + C_2B[u_2]$ A y B O.L.

$= C_1(A[u_1] + B[u_1]) + C_2(A[u_2] + B[u_2])$

$= C_1(A+B)[u_1] + C_2(A+B)[u_2]$ por def.

Este teorema puede generalizarse para un número finito de (sumandos) operadores.

Del Cálculo sabemos que si u_1 y u_2 son funciones que poseen n derivadas (derivada n-ésima) en el punto x, se tiene

$$\frac{d^n}{dx^n}(C_1u_1(x) + C_2u_2(x)) = C_1\frac{d^nu_1(x)}{dx^n} + C_2\frac{d^nu_2(x)}{dx^n}$$

donde n es un número natural cualquiera.

Por conveniencia, en el tratamiento de las E.D. introduciremos el símbolo D para representar el operador derivante; así que si y es una función diferenciable escribiremos

$$y'(x) = Dy(x)$$

o más simple $\quad y' = Dy$

Como $y'' = \frac{dy'}{dx}$ entonces $\quad y'' = Dy' = D(Dy)$

si a la expresión $D(Dy)$ la escribimos como D^2y tenemos que

$$y'' = D^2y$$

Siguiendo este orden de ideas tenemos en general que

$$y^{(m)} = D^my$$

siendo m un número natural; además, podemos definir $D^0y = y$.

De acuerdo con lo anterior, la E.D. Lineal de orden n puede escribirse como

$$a_0(x)D^ny + a_1(x)D^{n-1}y + \dots\dots + a_{n-1}(x)Dy + a_n(x)D^0y = h(x)$$

que podemos escribirla como

$$\left[a_0(x)D^n + a_1(x)D^{n-1} + \dots\dots + a_{n-1}(x)D + a_n(x)\right]y = h(x)$$

Def.4.2.4.- Llamaremos operador L_n al operador definido como

$$L_n[y] = a_0(x)D^ny + a_1(x)D^{n-1}y + \dots\dots + a_{n-1}(x)Dy + a_n(x)y$$

$$= \left[a_0(x)D^n + a_1(x)D^{n-1} + \dots\dots + a_{n-1}(x)D + a_n(x)\right]y$$

y lo llamaremos operador diferencial lineal de orden n.

PROPIEDADES DE L_n

Sea S el conjunto de todas las funciones que posean por lo menos n derivadas en el intervalo I. Entonces decimos que S es el dominio del operador L_n pues cada función de S es transformada en una nueva función por L_n, si y está en S y $h(x)$ es tal que

$$L_n[y] = h(x)$$ op L.4 aplicado a y

diremos que $h(x)$ es la imágen de y bajo L_n.

Teorema.4.2.2.- El operador L_n es un operador lineal. Esto es, sean y_1, y_2, y_3 elementos de S y C una constante cualquiera entonces:

a) $L_n[Cy_3] = C\, L_n[y_3]$

b) $L_n[y_1 + y_2] = L_n[y_1] + L_n[y_2]$

Prueba. a) Como y_3 está en S y C es una constante entonces Cy_3 posee por lo menos n derivadas por lo que Cy_3 está en S entonces

$$\begin{aligned} L_n[Cy_3] &= a_0(x)D^n(Cy_3) + a_1(x)D^{n-1}(Cy_3) + \cdots\cdots + a_{n-1}(x)D(Cy_3) + \\ &\quad a_n(x)\,(Cy_3) \\ &= Ca_0(x)D^n y_3 + Ca_1(x)D^{n-1}y_3 + \cdots\cdots + Ca_{n-1}(x)Dy_3 + Ca_n(x)y_3 \\ &= CL_n[y_3] \end{aligned}$$

b) Como y_1, y_2 poseen por lo menos n derivadas entonces $y_1 + y_2$ posee por lo menos n derivadas por lo que $y_1 + y_2$ está en S, entonces

$$\begin{aligned} L_n[y_1+y_2] &= a_0(x)D^n(y_1+y_2) + a_1(x)D^{n-1}(y_1+y_2) + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\quad + a_{n-1}(x)D(y_1+y_2) + a_n(x)(y_1+y_2) \\ &= a_0(x)D^n y_1 + a_1(x)D^{n-1}y_1 + \cdots\cdots + a_{n-1}(x)Dy_1 + a_n(x)y_1 + \\ &\quad a_0(x)D^n y_2 + a_1(x)D^{n-1}y_2 + \cdots\cdots + a_{n-1}(x)Dy_2 + a_n(x)y_2 \\ &= L_n[y_1] + L_n[y_2] \end{aligned}$$

En resumen

$$L_n[C_1y_1 + C_2y_2] = C_1L_n[y_1] + C_2L_n[y_2]$$

donde y_1, y_2 estan en S y C_1, C_2 son constantes.

Por inducción se demuestra que

$$L_n[C_1y_1 + C_2y_2 + \cdots\cdots + C_my_m] = C_1L_n[y_1] + C_2L_n[y_2] + \cdots\cdots\cdots + C_mL_n[y_m]$$

donde los y_i $i = 1,2,\ldots\ldots,m$ estan en S y los C_i $i = 1,2,\ldots\ldots\ldots,m$ son constantes.

Def.4.2.5.- Sean L_{n_1} y L_{n_2} dos operadores diferenciales lineales. Decimos que los dos operadores son iguales, y escribimos $L_{n_1} = L_{n_2}$, si son del mismo orden y si

$$L_{n_1}[y] = L_{n_2}[y]$$

para toda función y en el dominio común de L_{n_1} y L_{n_2}

Teorema.4.2.3.- Sean $L_{n_1} = a_o(x)D^n + a_1(x)D^{n-1} + \ldots\ldots + a_{n-1}(x)D + a_n(x)$

y $L_{n_2} = b_o(x)D^n + b_1(x)D^{n-1} + \ldots\ldots + b_{n-1}(x)D + b_n(x)$

donde las $a_i(x)$ y las $b_i(x)$ $i = 0,1,2,\ldots\ldots,n$ son funciones definidas en I. Entonces $L_{n_1} = L_{n_2}$ si y solo si para todo x de I $a_i(x) = b_i(x)$ $i = 0,1,2,\ldots\ldots,n$

Prueba. a)($\Leftarrow$) Como $a_i(x) = b_i(x)$ para todo x de I $i = 0,1,2,\ldots,n$ entonces se tiene

$$\begin{aligned} a_o(x)D^n y &= b_o(x)D^n y \\ a_1(x)D^{n-1}y &= b_1(x)D^{n-1}y \\ a_2(x)D^{n-2}y &= b_2(x)D^{n-2}y \\ &\vdots \\ a_{n-1}(x)Dy &= b_{n-1}(x)Dy \\ a_n(x)y &= b_n(x)y \end{aligned}$$

sumando miembro amiembro estas expresiones se obtiene que

$$L_{n_1}[y] = L_{n_2}[y]$$

y como L_{n_1} y L_{n_2} tienen el mismo orden concluímos que

$$L_{n_1} = L_{n_2}$$

b)($\Rightarrow$) Supongamos que $L_{n_1} = L_{n_2}$ y demostremos que los coeficientes correspondientes son iguales para todo x de I.

Sea y una función cualquiera en el dominio común de L_{n_1} y L_{n_2}

Como $L_{n_1}[y] = L_{n_2}[y]$ entonces

$$\sum_{i=0}^{n} a_i(x)D^{n-i}y = \sum_{i=0}^{n} b_i(x)D^{n-i}y$$

por tanto $$\sum_{i=0}^{n} [a_i(x) - b_i(x)]\, D^{n-i}y = 0$$

lo que implica que

$$(a_i(x) - b_i(x))\, D^{n-i}y = 0 \qquad i = 0,1,2,\ldots,n$$

o sea que $$a_i(x) - b_i(x) = 0$$

luego $$a_i(x) = b_i(x) \quad \text{para todo x de I } i = 0,1,2,\ldots,n$$

En la Def.4.2.3. definimos para que tipo de funciones está definido el operador suma, ahora veremos como se forma ese operador.

Def.4.2.6.- Si L_{n_1} y L_{n_2} son operadores diferenciales lineales cuyos coeficientes estan definidos en un mismo intervalo I, definimos el operador suma $L_{n_1} + L_{n_2}$ como el operador diferencial Lineal cuyos coeficientes se obtienen sumando los coeficientes correspondientes de L_{n_1} y L_{n_2}.

Ej.4.2.5.- Si $L_2 = 2xD^2 - 3D + e^x$ y $L_3 = xD^3 + 2xD^2 + xD + 1$ entonces

$$L_2 + L_3 = xD^3 + 4xD^2 + (x - 3)D + (e^x + 1)$$

Nótese que $\qquad L_2 + L_3 = L_3 + L_2$

Def.4.2.7.- Sean L_m y L_n dos operadores diferenciales lineales de orden m y n respectivamente cuyos coeficientes estan definidos en un intervalo I. Si los coeficientes de L_n poseen por lo menos m derivadas, entonces $L_m(L_n[g])$ está definido para toda función g que posea por lo menos derivada de orden m+n. Definimos el producto $L_m . L_n$ de la siguiente manera

$$(L_m . L_n)[g] = L_m(L_n[g])$$

para toda función g que posee por lo menos derivadas de orden m+n

Ej.4.2.6.- Si $L_{1_1} = xD - 1$ y $L_{1_2} = D + 2x$ Hallar $L_{1_1} . L_{1_2}$ y $L_{1_2} . L_{1_1}$

$$\begin{aligned}(L_{1_1} . L_{1_2})[g] &= L_{1_1}(L_{1_2}[g]) = L_{1_1}[(D + 2x)\, g] = L_{1_1}[g' + 2xg] \\ &= (xD - 1)_{(g' + 2xg)} = xD(g' + 2xg) - (g' + 2xg) \\ &= x(g'' + 2xg' + 2g) - (g' + 2xg) \\ &= xg'' + 2x^2g' - g' \\ &= xg'' + (2x^2 - 1)g' \\ &= xD^2g + (2x^2 - 1)Dg\end{aligned}$$

o sea $\quad L_{1_1} . L_{1_2} = xD^2 + (2x^2 - 1)D$

$$\begin{aligned}(L_{1_2} . L_{1_1})[g] &= L_{1_2}(L_{1_1}[g]) = L_{1_2}[(xD - 1)g] = L_{1_2}[xg' - g] \\ &= (D + 2x)_{(xg' - g)} = D(xg' - g) + 2x(xg' - g) \\ &= xg'' + g' - g' + 2x^2g' - 2xg \\ &= xg'' + 2x^2g' - 2xg \\ &= xD^2g + 2x^2Dg - 2xg\end{aligned}$$

luego $\qquad L_{1_2} . L_{1_1} = xD^2 + 2x^2D - 2x$

De lo anterior se deduce que $L_{1_1} . L_{1_2} \neq L_{1_2} . L_{1_1}$

Uno de los resultados más importantes de la teoría anterior es el siguiente_

Teorema.4.2.4.- Sean las funciones $y_1, y_2, \ldots\ldots, y_m$ soluciones de la E.D.Lineal Homogénea $L_n[y] = 0$ en un intervalo I.Si $c_1, c_2, \ldots, c_m$ son constantes,entonces la función $c_1y_1 + c_2y_2 + \ldots\ldots + c_my_m$ es tambien solución de $L_n[y] = 0$ en I.

Prueba. Ya que las funciones y_i $i = 1,2,\ldots\ldots,m$ son soluciones de $L_n[y] = 0$ entonces $L_n[y_i] = 0$ para $i = 1,2,\ldots\ldots,m$

Por tanto

$$L_n[c_1y_1 + c_2y_2 + \ldots\ldots + c_my_m] = c_1L_n[y_1] + c_2L_n[y_2] + \ldots\ldots + c_mL_n[y_m]$$
$$= c_1.0 + c_2.0 + \ldots\ldots\ldots + c_m.0$$
$$= 0$$

luego $c_1y_1 + c_2y_2 + \ldots\ldots\ldots + c_my_m$ es solución de $L_n[y] = 0$

Nota.4.2.1.- El Teorema.4.2.4. tambien nos dice que si tenemos tantas soluciones como índica el orden de la E.D. L.Homogénea entonces la solución general de dicha ecuación está dada por la combinación lineal de ellas.

OPERADORES POLINOMIALES

Las E.D. Lineales cuyos coeficientes sean constantes (funciones constantes) son de particular interés.

Una E.D. Lineal de orden n con coeficientes constantes tiene la forma

$$a_0 \frac{d^ny}{dx^n} + a_1 \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + a_{n-1}\frac{dy}{dx} + a_ny = h(x)$$

donde $a_0 \neq 0$ las a_i $i = 0,1,2,\ldots,n$ y $h(x)$ son continuas en I.

Esta ecuación puede escribirse como $L_n[y] = h(x)$ donde

$$L_n = a_0D^n + a_1D^{n-1} + \ldots\ldots\ldots\ldots + a_{n-1}D + a_n$$

y diremos que L_n es el operador diferencial Lineal con coeficientes constantes. Asociado a este operador está el polinomio

$$P(r) = a_0r^n + a_1r^{n-1} + \ldots\ldots\ldots\ldots + a_{n-1}r + a_n$$

entonces,cuando tengamos operadores diferenciales lineales con coeficientes constantes en vez de L_n escribiremos $P(D)$ obteniendose la expresión

$$P(D) = a_0D^n + a_1D^{n-1} + \ldots\ldots\ldots\ldots + a_{n-1}D + a_n$$

que llamaremos operador polinómico.

Es fácil ver que la suma de dos operadores polinómicos es otro operador polinómico.El producto de dos operadores polinómicos es otro operador polinómico y para verificarlo consideremos lo siguiente:

a) Sea $P(D) = a_oD^n + a_1D^{n-1} + \dots\dots\dots\dots + a_{n-1}D + a_n$ y $Q(D) = bD^k$ donde k es un número natural o cero y los polinomios asociados son $P(r) = a_or^n + a_1r^{n-1} + \dots\dots\dots + a_{n-1}r + a_n$ y $Q(r) = br^k$ respectivamente entonces

$$\left[Q(D).P(D)\right][u] = Q(D)\left[P(D)[u]\right]$$
$$= Q(D)(a_oD^nu + a_1D^{n-1}u + \dots\dots\dots + a_{n-1}Du + a_nu)$$
$$= bD^k(a_oD^nu + a_1D^{n-1}u + \dots\dots\dots + a_{n-1}Du + a_nu)$$
$$= ba_oD^{n+k}u + ba_1D^{n+k-1}u + \dots\dots\dots + ba_{n-1}D^{k+1}u + ba_nD^ku$$
$$= (ba_oD^{n+k} + ba_1D^{n+k-1} + \dots\dots\dots + ba_{n-1}D^{k+1} + ba_nD^k)\,u$$

luego $Q(D).P(D) = ba_oD^{n+k} + ba_1D^{n+k-1} + \dots\dots\dots + ba_{n-1}D^{k+1} + ba_nD^k$ que es un operador polinómico que tiene asociado al polinomio

$$ba_or^{n+k} + ba_1r^{n+k-1} + \dots\dots\dots + ba_{n-1}r^{k+1} + ba_nr^k = br^k(a_or^n + a_1r^{n-1} + \dots$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots + a_{n-1}r + a_n) = Q(r).P(r)$$

b) Consideremos el caso general, o sea

$$P(D) = a_oD^n + a_1D^{n-1} + \dots\dots\dots\dots\dots + a_{n-1}D + a_n$$
$$Q(D) = b_oD^m + b_1D^{m-1} + \dots\dots\dots\dots\dots + b_{m-1}D + b_m$$

cuyos polinomios asociados son

$$P(r) = a_or^n + a_1r^{n-1} + \dots\dots\dots\dots\dots + a_{n-1}r + a_n \quad \text{y}$$
$$Q(r) = b_or^m + b_1r^{m-1} + \dots\dots\dots\dots\dots + b_{m-1}r + b_m$$

entonces

$$\left[Q(D).P(D)\right][u] = Q(D)\left[P(D)[u]\right] = (b_oD^m + b_1D^{m-1} + \dots + b_{m-1}D + b_m)\left[P(D)[u]\right]$$
$$= b_oD^m\left[P(D)[u]\right] + b_1D^{m-1}\left[P(D)[u]\right] + \dots\dots + b_{m-1}D\left[P(D)[u]\right] + b_m\left[P(D)[u]\right]$$
$$= \left[b_oD^m.P(D)\right][u] + \left[b_1D^{m-1}.P(D)\right][u] + \dots + \left[b_{m-1}D.P(D)\right][u] + \left[b_m.P(D)\right][u]$$

por tanto $Q(D).P(D)$ es la suma de los operadores polinómicos

$$b_oD^m.P(D)\ ,\ b_1D^{m-1}.P(D)\ ,\ \dots\dots\dots\dots,\ b_{m-1}D.P(D)\ ,\ b_m.P(D)$$

que es a su vez un operador polinómico cuyo polinomio asociado es

$$b_or^m.P(r) + b_1r^{m-1}.P(r) + \dots\dots\dots + b_{m-1}r.P(r) + b_m.P(r) = (b_or^m +$$
$$b_1r^{m-1} + \dots\dots\dots\dots\dots + b_{m-1}r + b_m)P(r) = Q(r).P(r)$$

En resumen, El polinomio asociado al producto de dos operadores polinómicos es el producto de los polinomios asociados.

Como estos polinomios ordinarios commutan para el producto, entonces se tiene que

$$Q(D).P(D) = P(D).Q(D)$$

o sea que los operadores polinómicos commutan bajo el producto

Realmente lo que se ha hecho es mostrar que hay un isomorfismo entre el conjunto de los operadores polinómicos y el conjunto de los polinomios. Es decir, que existe una función $f: X \longrightarrow Y$ definida por $f[P(D)] = P(r)$ que cumple las siguientes propiedades

$$a)\ f[P(D) + Q(D)] = P(r) + Q(r) = f[P(D)] + f[Q(D)]$$

$$b)\ f[P(D).Q(D)] = P(r)Q(r) = f[P(D)]\ f[Q(D)]$$

Recuerdese que si f es un homomorfismo y biyectiva entonces f es un isomorfismo. Lo anterior nos permite concluír que las propiedades que tenga uno de los conjuntos (X o Y) las tiene tambien el otro.

Como Y es el conjunto de los polinomios y sabemos que un polinomio de grado n puede escribirse como el producto de n factores lineales o sea

$$P(r) = a_o(r-r_1)(r-r_2)\cdots\cdots\cdots(r-r_n)$$

donde los números r_i $i = 1,2,\ldots\ldots,n$ no necesariamente son distintos; estos números representan las raíces del polinomio $P(r)$ y por tanto serán reales o complejos. Por el álgebra sabemos que si $P(r)$ tiene coeficientes reales y si $r_j = a+bi$ es raíz de $P(r)$ entonces $r_{j'} = a - bi$ tambien lo es. $\therefore r_j = a \pm bi$

Lo anterior nos permite concluír que los operadores polinómicos pueden factorizarse en forma similar a como esté factorizado su polinomio asociado.

Ej.4.2.7.- Sea $P(D) = D^3 - 5D^2 + 9D - 5$ entonces su polinomio asociado es

$P(r) = r^3 - 5r^2 + 9r - 5$ que se puede factorizar de la siguiente manera

$$P(r) = r^3 - r - 5(r^2 - 2r + 1) = r(r^2 - 1) - 5(r - 1)^2$$

$$= r(r - 1)(r + 1) - 5(r - 1)^2 = (r - 1)(r^2 - 4r + 5)$$

$$= (r - 1)(r - 2 - i)(r - 2 + i)$$

luego

$$P(D) = D^3 - 5D^2 + 9D - 5 = (D - 1)(D - 2 - i)(D - 2 + i)$$

Ej.4.2.8.- Si $P(D)$ es un operador polinómico de orden n demuestre que

$$P(D)e^{mx} = P(m)e^{mx}$$

Como $P(D)$ es un operador polinómico de orden n entonces sus coeficientes son constantes o sea que

$$P(D) = a_oD^n + a_1D^{n-1} + \cdots\cdots + a_{n-1}D + a_n$$

entonces

$$P(D)e^{mx} = a_oD^ne^{mx} + a_1D^{n-1}e^{mx} + \ldots\ldots + a_{n-1}De^{mx} + a_ne^{mx}$$

$$= a_om^ne^{mx} + a_1m^{n-1}e^{mx} + \ldots\ldots + a_{n-1}me^{mx} + a_ne^{mx}$$

$$= (a_om^n + a_1m^{n-1} + \ldots\ldots + a_{n-1}m + a_n)e^{mx}$$

$$= P(m)e^{mx}$$

Este problema es sumamente importante pues nos dice que si m es raíz de P(r) (el polinomio asociado a P(D)) entonces $P(D)e^{mx} = 0$ o sea que e^{mx} es solución de la E.D.L.Homogénea con coeficientes constantes

$$P(D)y = 0$$

por tanto si $m_1, m_2, \ldots\ldots, m_n$ son las raíces del polinomio asociado a P(D) entonces por el teorema.4.2.4. tenemos que

$$c_1e^{m_1x} + c_2e^{m_2x} + \ldots\ldots\ldots + c_ne^{m_nx}$$

es tambien solución de dicha E.D.

Mas adelante veremos como hallar la solución general de una E.D.L. Homogénea con coeficientes constantes que depende de las raíces del polinomio asociado al operador polinómico en cuestión.

Veamos ahora una aplicación del problema anterior.

Ej.4.2.9.- Hallar las posibles soluciones de la E.D.L. Homogénea

$$y'''' - 13y'' + 36y = 0$$

Esta E.D. puede escribirse como

$$D^4y - 13D^2y + 36y = 0$$

$$(D^4 - 13D^2 + 36)y = 0$$

entonces el operador polinómico es

$$P(D) = D^4 - 13D^2 + 36$$

y por tanto su polinomio asociado es

$$P(r) = r^4 - 13r^2 + 36$$

que se puede factorizar así

$$P(r) = (r^2 - 4)(r^2 - 9)$$

$$= (r - 2)(r + 2)(r - 3)(r + 3)$$

luego el operador polinómico puede escribirse como

$$P(D) = (D - 2)(D + 2)(D - 3)(D + 3)$$

o sea que la E.D. puede escribirse como

$$(D - 2)(D + 2)(D - 3)(D + 3)y = 0$$

Debido al problema anterior, sabemos que las raíces del polinomio asociado al operador polinómico $D^4 - 13D^2 + 36$ son 2,-2,3,-3 y por tanto e^{2x}, e^{-2x}, e^{3x} y e^{-3x} son soluciones de la E.D. dada y por el teorema 4.2.4, tenemos que

$$c_1e^{2x} + c_2e^{-2x} + c_3e^{3x} + c_4e^{-3x}$$

es tambien solución de dicha E.D. es más, es la solución general.

Mas adelante veremos los criterios que hay que tener en cuenta para encontrar la solución general de una E.D.L. Homogénea con coeficientes constantes.

EJERCICIOS 4.2.

1) Demostrar que el operador A definido por

$$A[u] = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2$$

no es un operador Lineal.

2) Sea $u = u(x,y,z)$. Demostrar que el operador A definido por

$$A[u] = u(t,y,z) + u(x,t,z) + u(x,y,t)$$

es un operador Lineal.

3) Sea $u = u(x,y)$. Demostrar que el operador A definido por

$$A[u] = u_{xx}(x,0) + u_x(x,0)$$

es un operador lineal.

4) Demostrar que el operador definido por

$$A[u] = \int_a^b G(x,t)u(x,t)dt$$

es un operador lineal

5) Demostrar que el operador A definido por

$$A[u] = \int_a^b G(x,t)(u(x,t))^2 dt$$

no es un operador lineal.

6) Si L_n y L_m son operadores diferenciales lineales tales que $L_n . L_m$ está definido, demuestre que $L_n . L_m$ es tambien un operador lineal.

7) Hallar $L_{1_1} . L_{1_2}$ si $L_{1_1} = D - \operatorname{tg} x$ y $L_{1_2} = D + \operatorname{tg} x$

8) Si L_n, L_m y L_s son operadores diferenciales lineales demuestre que

$$L_n(L_m + L_s) = L_n . L_m + L_n . L_s$$

9) Sean $L_1 = a_1(x)D + b_1(x)$ y $L_2 = a_2(x)D + b_2(x)$ donde $a_1(x), a_2(x), b_1(x)$ y $b_2(x)$ son diferenciables en un intervalo I, muestre que L_1 y L_2 commutan si y solo si $a_1(x) = ka_2(x)$ y $b_2(x) = kb_1(x) + C$ donde k y C son constantes.

10) Demuestre que $xy'' + (2x + 1)y' + 2y = 0$ puede escribirse como $(D + 2)(xD + 1)y = 0$

11) Suponga que la función u es una solución de la E.D. $xy'' + (2x + 1)y' + 2y = 0$ Sea $v = (xD + 1)u$ demuestre que $(D + 2)v = 0$. Hallar v y luego u.

12) Si la función u es una solución de la E.D. $P(D)y = 0$ y v es una solución de la E.D. $Q(D)y = 0$ demuestre que u y v son ambas soluciones de $P(D)Q(D)y = 0$

13) Demuestre que no hay ninguna E.D. de la forma $P(D)y = 0$ que tiene a $f(x)$ como solución donde $f(x) = \frac{1}{x}$ con x mayor que cero.

4.3. DEPENDENCIA LINEAL - EL WRONSKIANO

Def.4.3.1.- Sean las funciones $f_1(x), f_2(x), \ldots\ldots, f_m(x)$ definidas en un intervalo I. El conjunto formado por las funciones $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_m(x)$ se dice que es Linealmente Dependiente en I si existen las constantes $c_1, c_2, \ldots, c_m$ no todas cero tales que para todo x del intervalo I se cumple la identidad

$$c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \ldots\ldots\ldots + c_m f_m(x) = 0$$

De lo anterior se deduce que si las funciones $f_1(x), f_2(x), \ldots\ldots, f_m(x)$ son linealmente Dependientes, por lo menos una de ellas puede expresarse como combinación lineal de las otras y recíprocamente. O sea, que si $c_i \neq 0$ entonces

$$f_i(x) = -\frac{c_1}{c_i} f_1(x) - \frac{c_2}{c_i} f_2(x) - \ldots\ldots - \frac{c_{i-1}}{c_i} f_{i-1}(x) - \frac{c_{i+1}}{c_i} f_{i+1}(x) - \ldots\ldots - \frac{c_m}{c_i} f_m(x)$$

Ej.4.3.1.- Sean $f_1(x) = 2e^{-x}$, $f_2(x) = \cos x$ y $f_3(x) = -5e^{-x}$. Forman estas tres funciones un conjunto Linealmente Dependiente?

Observamos que $5f_1(x) + 0f_2(x) + 2f_3(x) = 0$ y en esta expresión $c_1 = 5$ $c_2 = 0$ y $c_3 = 2$ o sea que no todas las c_i son cero y por tanto el conjunto formado por esas tres funciones es Linealmente Dependiente. Note que $f_1(x)$ se puede expresar como combinación lineal de las otras funciones.

Def.4.3.2.- Un conjunto de funciones que no es Linealmente Dependiente en I se dice que es Linealmente Independiente en I.

En otras palabras,

$$c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \ldots\ldots\ldots + c_m f_m(x) = 0$$

solamente para

$$c_1 = c_2 = \ldots\ldots\ldots = c_m = 0$$

y se dice que las funciones $f_1(x), f_2(x), \ldots\ldots, f_m(x)$ son linealmente Independientes en el intervalo I.

Ej.4.3.2.- El conjunto formado por las funciones $f_1(x) = 1$, $f_2(x) = x$, $f_3(x) = x^2$ y $f_4(x) = x^3$ es linealmente independiente en todos los reales pues la igualdad

$$c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + c_3 f_3(x) + c_4 f_4(x) = 0$$

se cumple para todos los x que esten en los reales solamente cuando

$$c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = 0$$

Si al menos uno de estos números es diferente de cero, en el primer miembro de esta igualdad tendríamos un polinomio de grado no superior al tercero que sería cero para contados valores del intervalo considerado.

Ej.4.3.3.- El conjunto formado por las funciones $f_1(x) = e^{ax}$, $f_2(x) = e^{bx}$, $f_3(x) = e^{cx}$ donde a,b,c son distintos dos a dos, es Linealmente Independiente en los Reales.

Para la demostración de este problema supongamos por el contrario que el sistema dado de funciones es linealmente Dependiente en los Reales Entonces

$$c_1e^{ax} + c_2e^{bx} + c_3e^{cx} = 0$$

en el intervalo siendo distinto de cero al menos uno de los números c_1, c_2, c_3; sea $c_3 \neq 0$. Como la función exponencial es siempre positiva podemos dividir por e^{ax} a ambos lados de la igualdad obteniendose

$$c_1 + c_2e^{(b-a)x} + c_3e^{(c-a)x} = 0$$

Derivando esta expresión resulta

$$c_2(b-a)e^{(b-a)x} + c_3(c-a)e^{(c-a)x} = 0$$

Dividiendo a ambos lados de esta igualdad por $e^{(b-a)x}$ se tiene

$$c_2(b-a) + c_3(c-a)e^{(c-b)x} = 0$$

y derivando esta expresión obtenemos

$$c_3(c-a)(c-b)e^{(c-b)x} = 0$$

lo cual es imposible por ser $c_3 \neq 0$, $c \neq a$, $c \neq b$ y $e^{(c-b)x} \neq 0$ Contradicción. Por consiguiente, el sistema de funciones dado es Linealmente Independiente en los Reales.

Ej.4.3.4.- Las funciones $e^{ax}\text{sen } bx$, $e^{ax}\cos bx$

donde $b \neq 0$, son Linealmente Independientes en los Reales.

Sea

$$c_1e^{ax}\text{sen } bx + c_2e^{ax}\cos bx = 0$$

entonces dividiendo por e^{ax} a ambos lados de la igualdad obtenemos

$$c_1\text{sen } bx + c_2\cos bx = 0$$

en esta igualdad si hacemos $x = 0$ tenemos que $c_2 = 0$ y por tanto

$$c_1\text{sen } bx = 0$$

pero la función sen bx no es identicamente igual a cero en los reales por tanto $c_1 = 0$. Luego las funciones dadas son Linealmente Independientes en los Reales.

Nótese que se ha demostrado tambien que las funciones sen bx y cos bx son Linealmente Independientes en los Reales.

Nota.4.3.1.- Se puede enunciar otro criterio, para el caso de dos funciones, de Independencia Lineal,

Las funciones $f_1(x)$ y $f_2(x)$ son Linealmente Independientes en el intervalo I si la razón entre ellas no es una constante.

En caso contrario se dice que las funciones son Linealmente Dependientes.

Def.4.3.3.- Supongamos que las m funciones $f_1(x), f_2(x), \ldots\ldots, f_m(x)$ definidas en el intervalo I poseen por lo menos derivadas de orden m-1 en I. Asociado a este conjunto de funciones y cada punto de I existe un determinante

$$\begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \cdots\cdots & f_m(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) & \cdots\cdots & f_m'(x) \\ f_1''(x) & f_2''(x) & \cdots\cdots & f_m''(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_1^{(m-1)}(x) & f_2^{(m-1)}(x) & \cdots\cdots & f_m^{(m-1)}(x) \end{vmatrix}$$

que llamaremos wronskiano de las funciones $f_1(x), f_2(x), \ldots\ldots, f_m(x)$ y lo denotaremos por $W(x, f_1, f_2, \ldots\ldots, f_m)$

Nota.4.3.2.- Obsérvese que, por lo general, el wronskiano es una función de x definida en cierto intervalo.

El wronskiano de un conjunto de funciones suministra un criterio para la independencia Lineal de las funciones.

Ej.4.3.5.- Hallar el wronskiano de las funciones $f_1(x) = \operatorname{sen} x$, $f_2(x) = \operatorname{sen}(x + \frac{\pi}{8})$ $f_3(x) = \operatorname{sen}(x - \frac{\pi}{8})$

$$\begin{vmatrix} \operatorname{sen} x & \operatorname{sen}(x + \frac{\pi}{8}) & \operatorname{sen}(x - \frac{\pi}{8}) \\ \cos x & \cos(x + \frac{\pi}{8}) & \cos(x - \frac{\pi}{8}) \\ -\operatorname{sen} x & -\operatorname{sen}(x + \frac{\pi}{8}) & -\operatorname{sen}(x - \frac{\pi}{8}) \end{vmatrix} = 0$$

puesto que la primera y última filas del determinante son <u>proporcionales</u>.

Teorema.4.3.1.- Sean las funciones $f_1(x), f_2(x), \ldots\ldots, f_m(x)$ definidas en I y que poseen por lo menos m-1 derivadas en I. Si las funciones son Linealmente Dependientes en I, el wronskiano $W(x, f_1, f_2, \ldots, f_m)$ es cero en todos los puntos de I.

Prueba. Si las funciones son Linealmente Dependientes en I, existen constantes $c_1, c_2, \ldots\ldots\ldots, c_m$ no todas cero tales que

$$c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \cdots\cdots\cdots + C_m f_m(x) = 0$$

para todo x de I, por tanto, esta expresión tendrá todas sus derivadas nulas en I, esto es,

$$\begin{aligned} c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \cdots\cdots\cdots + c_m f_m(x) &= 0 \\ c_1 f_1'(x) + c_2 f_2'(x) + \cdots\cdots\cdots + c_m f_m'(x) &= 0 \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \quad & \\ c_1 f_1^{(m-1)}(x) + c_2 f_2^{(m-1)}(x) + \cdots\cdots + c_m f_m^{(m-1)}(x) &= 0 \end{aligned}$$

que es un sistema homogéneo.

Haciendo uso de la Regla de Cramer podemos encontrar el valor de c_i $i = 1, 2, \ldots, m$ y vemos que el denominador es el wronskiano de las funciones dadas, por tanto si $W(x, f_1, f_2, \ldots, f_m)$ es diferente de cero existe solución para el sistema homogéneo que es la trivial o sea $c_1 = c_2 = \ldots = c_m = 0$ pero entonces el conjunto formado por dichas funciones es Linealmente Independiente lo que contradice la hipótesis. Contradicción. Luego $W(x, f_1, f_2, \ldots, f_m) = 0$

Teorema.4.3.2.- Sean las funciones $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_m(x)$ definidas en I y que poseen por lo menos $m-1$ derivadas en I. Si el wronskiano $W(x, f_1, f_2, \ldots, f_m)$ es diferente de cero en todos los puntos de I entonces las funciones dadas son Linealmente Independientes en I.

Prueba. Similar al anterior.

Nota.4.3.3. Los recíprocos de los teoremas anteriores no se satisfacen o sea que "Si el wronskiano de un conjunto de funciones es cero las funciones no necesariamente son Linealmente Dependientes" y tambien "Si las funciones son Linealmente Independientes no necesariamente su wronskiano es diferente de cero".

Ej.4.3.6.- El conjunto formado por las funciones $f_1(x) = x$, $f_2(x) = x^2$ y $f_3(x) = x^3$ es linealmente independiente en los reales (véase Ej.4.3.2.) y sin embargo $W(x, f_1, f_2, f_3) = 2x^3$ que es cero para $x = 0$.

Ej.4.3.7.- Sean las funciones $f_1(x) = \cos x$, $f_2(x) = \operatorname{sen} x$ y $f_3(x) = x$. Diga en que intervalo estas funciones son Linealmente Independientes.

Se tiene

$$W(x, f_1, f_2, f_3) = \begin{vmatrix} \cos x & \operatorname{sen} x & x \\ -\operatorname{sen} x & \cos x & 1 \\ -\cos x & -\operatorname{sen} x & 0 \end{vmatrix} = x$$

entonces $W(x, f_1, f_2, f_3)$ es diferente de cero en todos los reales menos el cero, por lo tanto las funciones dadas son L.I. en ese conjunto. Analicemos ahora para $x = 0$.

Sea $$c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x + c_3 x = 0$$

Si a x le damos el valor cero tenemos

$$c_1 \cos 0 + c_2 \operatorname{sen} 0 + c_3 . 0 = 0$$

lo que implica que $c_1 = 0$ y que c_2 y c_3 pueden tomar cualquier valor. Luego en $x = 0$ las funciones no son L.I.

Ej.4.3.8.- Sean las funciones $f_1(x) = e^{m_1 x}$, $f_2(x) = e^{m_2 x}$, $f_3(x) = e^{m_3 x}$, ..., $f_n(x) = e^{m_n x}$ donde $m_i \neq m_j$ para $i \neq j$ $i, j = 1, 2, 3, \ldots, n$

Diga en que conjunto estas funciones son L.I.

$$W(x,f_1,f_2,\ldots\ldots,f_n)=\begin{vmatrix} e^{m_1x} & e^{m_2x} & \ldots\ldots & e^{m_nx} \\ m_1e^{m_1x} & m_2e^{m_2x} & \ldots\ldots & m_ne^{m_nx} \\ m_1^2e^{m_1x} & m_2^2e^{m_2x} & \ldots\ldots & m_n^2e^{m_nx} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ m_1^{n-1}e^{m_1x} & m_2^{n-1}e^{m_2x} & \ldots\ldots & m_n^{n-1}e^{m_nx} \end{vmatrix}$$

$$= e^{(m_1+m_2+\ldots+m_n)x}\begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ m_1 & m_2 & \ldots & m_n \\ m_1^2 & m_2^2 & \ldots & m_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \\ m_1^{n-1} & m_2^{n-1} & \ldots & m_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

$$= e^{(m_1+m_2+\ldots+m_n)x}(m_2-m_1)\ (m_3-m_1)(m_3-m_2)\ (m_4-m_1)$$
$$(m_4-m_2)(m_4-m_3)\ \ldots\ldots\ldots$$
$$(m_n-m_1)(m_n-m_2)\ldots\ldots(m_n-m_{n-1})$$

luego el conjunto de las funciones dadas es L.I. en todos los Reales.

El determinante formado por las potencias de las m_i $i = 1,2,\ldots,n$ es conocido con el nombre de determinante de Vandermonde.

Teorema.4.3.3.- Si las funciones $f_1,f_2,\ldots,f_n$ son L.I. y soluciones de la E.D. L. Homogénea $L_n[y] = 0$ con coeficientes continuos en I entonces $W(x,f_1,f_2,\ldots,f_n)$ es diferente de cero en todos los puntos del.

Prueba. Supongamos que $W(x,f_1,f_2,\ldots,f_n) = 0$ en un punto x_o de I. Entonces existen constantes $c_1,c_2,\ldots,c_n$ no todas cero tal que

$$c_1f_1(x_o) + c_2f_2(x_o) + \ldots\ldots + c_nf_n(x_o) = 0$$
$$c_1f_1'(x_o) + c_2f_2'(x_o) + \ldots\ldots + c_nf_n'(x_o) = 0$$
$$c_1f_1''(x_o) + c_2f_2''(x_o) + \ldots\ldots + c_nf_n''(x_o) = 0$$
$$\vdots$$
$$c_1f_1^{n-1}(x_o) + c_2f_2^{n-1}(x_o) + \ldots + c_nf_n^{n-1}(x_o) = 0$$

Definamos la función $\phi(x) = c_1f_1(x) + c_2f_2(x) + \ldots + c_nf_n(x)$

Esta función $\phi(x)$ es solución de la E.D.L. Homogénea $L_n[y] = 0$

Pero $y = 0$ es tambien solución de $L_n[y] = 0$ entonces, debido al teorema de existencia y unicidad con condiciones iniciales para $L_n[y] = 0$ se teine que $\phi(x) = 0$ en I.

Luego $$c_1f_1(x) + c_2f_2(x) + \ldots\ldots + c_nf_n(x) = 0$$

y además sabemos que no todas las constantes c_i $i = 1,2,\ldots,n$ son cero o sea que las funciones $f_1,f_2,\ldots,f_n$ son L.D. en I. Contradicción.

Luego $W(x,f_1,f_2,\ldots,f_n) \neq 0$ para todo x de I.

Teorema.4.3.4.- Si las funciones $f_1,f_2,\ldots,f_n$ son soluciones de la E.D.L. Homogénea $L_n[y]= 0$ con coeficientes continuos en I y $W(x,f_1,f_2,\ldots,f_n) \neq 0$ en todos los puntos de I entonces las funciones $f_1, f_2,\ldots,f_n$ son L.I. en I.

Prueba. Similar al anterior

De lo anterior se deduce que la combinación lineal de las n soluciones L.I. de la E.D.L. Homogénea $L_n[y]= 0$ es la solución general de $L_n[y]= 0$.

Teorema.4.3.5.- Sean $y_1 = y_1(x)$, $y_2 = y_2(x)$,........,$y_n = y_n(x)$ las n soluciones de la E.D.L. Homogénea $L_n[y]= 0$ en el intervalo I.Entonces

$W(x,y_1,y_2,\ldots,y_n) = 0$ para cada x de I

$W(x,y_1,y_2,\ldots,y_n) \neq 0$ para cada x de I.

Prueba. Sabemos que $L_n[y] = 0 = a_o(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y$ donde $a_o(x),a_1(x),\ldots,a_n(x)$ son funciones continuas en I. y $a_o(x) \neq 0$ para todo x de I.

Como $y_1,y_2,\ldots,y_n$ son soluciones de $L_n[y]= 0$ se tiene

$$a_o(x)y_i^{(n)} + a_1(x)y_i^{(n-1)} + \ldots\ldots + a_{n-1}(x)y_i' + a_n(x)y_i = 0$$

para $i = 1,2,\ldots,n$. De aquí obtenemos

$$y_i^{(n)} = -\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k(x)}{a_o(x)}\, y_i^{(n-k)} \qquad i = 1,2,\ldots,n$$

donde $y_i^{(o)} = y_i$

Sabemos que

$$W(x,y_1,y_2,\ldots,y_n) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ y_1'' & y_2'' & \cdots & y_n'' \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

por tanto

$$W'(x,y_1,y_2,\ldots,y_n) = \begin{vmatrix} y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ y_1'' & y_1'' & \cdots & y_n'' \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

$$
+\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots\cdots & y_n \\ y_1'' & y_2'' & \cdots\cdots & y_n'' \\ y_1'' & y_2'' & \cdots\cdots & y_n'' \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots\cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}
$$

$$
+ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
$$

$$
+\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots\cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots\cdots & y_n' \\ y_1'' & y_2'' & \cdots\cdots & y_n'' \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots\cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}
$$

$$
+\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots\cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots\cdots & y_n' \\ y_1'' & y_2'' & \cdots\cdots & y_n'' \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n)} & y_2^{(n)} & \cdots\cdots & y_n^{(n)} \end{vmatrix}
$$

luego

$$
W'(x,y_1,y_2,\ldots,y_n) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots\cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots\cdots & y_n' \\ y_1'' & y_2'' & \cdots\cdots & y_n'' \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-2)} & y_2^{(n-2)} & \cdots\cdots & y_n^{(n-2)} \\ y_1^{(n)} & y_2^{(n)} & \cdots\cdots & y_n^{(n)} \end{vmatrix}
$$

ya que todos los determinantes que aparecen, excepto el último, tienen dos filas iguales y todo determinante que tenga dos filas iguales es igual a cero. Entonces $W'(x,y_1,y_2,\ldots\ldots,y_n)$ es igual a

$$
\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots\cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots\cdots & y_n' \\ y_1'' & y_2'' & \cdots\cdots & y_n'' \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k(x)}{a_0(x)} y_1^{(n-k)} & -\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k(x)}{a_0(x)} y_2^{(n-k)} & \cdots\cdots, & -\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k(x)}{a_0(x)} y^{(n-k)} \end{vmatrix}
$$

Ahora multiplicamos la primera fila, la segunda fila,....,la n-1 fila del determinante * por $\frac{a_n(x)}{a_o(x)}, \frac{a_{n-1}(x)}{a_o(x)}, \ldots\ldots, \frac{a_2(x)}{a_o(x)}$ respectivamente y sumamos este resultado a la última fila obteniendo

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots\cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots\cdots & y_n' \\ y_1'' & y_2'' & \cdots\cdots & y_n'' \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -\frac{a_1(x)}{a_o(x)}\, y_1^{(n-1)} & -\frac{a_1(x)}{a_o(x)}\, y_2^{(n-1)} & \cdots\cdots & -\frac{a_1(x)}{a_o(x)}\, y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

de este determinante podemos sacar de factor común a la expresión $-\frac{a_1(X)}{a_o(X)}$ obteniendo la expresión

$$W'(x,y_1,y_2,\ldots\ldots,y_n) = -\frac{a_1(x)}{a_o(x)}\, W(x,y_1,y_2,\ldots\ldots,y_n)$$

que es una E.D. de primer orden cuya solución es

$$W(x,y_1,y_2,\ldots\ldots,y_n) = C\, e^{-\int \frac{a_1(x)}{a_0(x)}dx}$$

y como la función exponencial es siempre positiva entonces si $C = 0$ se tiene $W(x,y_1,y_2,\ldots,y_n) = 0$ para cada x de I, pero si $C \neq 0$ tenemos $W(x,y_1,y_2,\ldots,y_n) \neq 0$ para cada x de I.

El anterior resultado se conoce como la fórmula de Abel o la Identidad de Liouville.

Teorema.4.3.6.- Si $y = u(x)$ es una solución de la E.D.L.Homogénea $L_n[y]= 0$ y $y = v(x)$ es una solución de la E.D.L. no Homogénea $L_n[y]= h(x)$ Entonces $y = u(x) + v(x)$ es solución de la E.D.L. no homogénea $L_n[y]= h(x)$

Prueba. Puesto que u(x) es solución de $L_n[y]= 0$ tenemos $L_n[u(x)] = 0$

y como v(x) es solución de $L_n[y]= h(x)$ entonces $L_n[v(x)] = h(x)$

luego $L_n[u(x)] + L_n[v(x)] = h(x) = L_n[u(x) + v(x)]$

por tanto $u(x) + v(x)$ es solución de $L_n[y]= h(x)$

A la solución general de la E.D.L. Homogénea la llamaremos "solución complementaria" y la designaremos por y_c. A la solución de la E.D.L. no Homogénea la llamaremos "solución particular" y la designaremos por y_p. Obsérvase que la solución particular no contiene constantes arbitrarias.

Nota.4.3.4.- Se sabe que la E.D.L. de orden n tiene como solución general una expresión que contiene n constantes arbitrarias. Del teorema anterior se deduce que $y = u(x) + v(x)$ será la solución general si v(x) no contiene constantes arbitrarias y u(x) contiene n constantes arbitrarias.

De lo anterior se deduce que para hallar la solución general de $L_n[y]= h(x)$ es necesario responder lo siguiente:
a) Como hallar la solución complementaria?
b) Como hallar la solución particular?

Antes de responderlas veremos el siguiente teorema.

Teorema.4.3.7.- Supongamos que $y_1(x)$ es solución de $L_2[y]= 0$ en el intervalo I y $y_1(x) \neq 0$ para cada x de I, entonces

a) La transformación $y(x) = v(x)y_1(x)$ reduce la expresión

$a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = L_2[y]= 0$

en I a una E.D.L. Homogénea

$a_0(x)y_1(x)u' + \left[2a_0(x)y_1'(x) + a_1(x)y_1(x)\right] u = 0$

donde $u = v'$.

b) La otra solución $y_2(x)$ de $L_2[y]= 0$ en I es dada por la expresión

$$y_2(x) = y_1(x) \int \frac{e^{-\int \frac{a_1(x)}{a_0(x)} dx}}{[y_1(x)]^2} dx$$

c) Las funciones $y_1(x)$ y $y_2(x)$ son L.I. en I.

Prueba. Derivando la expresión $y = vy_1$ dos veces obtenemos

$y' = vy_1' + v'y_1$ $\qquad$ $y'' = vy_1'' + 2v'y_1' + v''y_1$

sustituyendo y, y', y'' en $L_2[y]= 0$ y agrupando términos tenemos

$$a_0(x)y_1v'' + \left[2a_0(x)y_1' + a_1(x)y_1\right] v' + \left[a_0(x)y_1'' + a_1(x)y_1' + a_2(x)y_1\right] v = 0$$

pero como y_1 es solución de $L_2[y]= 0$ entonces

$a_0(x)y_1'' + a_1(x)y_1' + a_2(x)y_1 = 0$

y por tanto la expresión anterior se convierte en

$a_0(x)y_1v'' + \left[2a_0(x)y_1' + a_1(x)y_1\right]v' = 0$

haciendo $u = v'$ y reemplazando en la E.D. anterior tenemos

$a_0(x)y_1u' + \left[2a_0(x)y_1' + a_1(x)y_1\right]u = 0$

b) La E.D. anterior es Lineal y de primer orden por tanto

$$u(x) = C\, e^{-\int \frac{2a_0(x)y_1' + a_1(x)y_1}{a_0(x)y_1} dx} = C\, e^{-\int \frac{2y_1'}{y_1} dx}\, e^{-\int \frac{a_1(x)}{a_0(x)} dx}$$

$$= C\, e^{-2\mathrm{Ln}\, y_1}\, e^{-\int \frac{a_1(x)}{a_0(x)} dx}$$

$$= C\, y_1^{-2}\, e^{-\int \frac{a_1(x)}{a_0(x)} dx}$$

pero $u = v'$ entonces

$$v(x) = C\ y_1^{-2}\ e^{-\int \frac{a_1(x)}{a_o(x)}\,dx + K}$$

$$y = C\ y_1 \int \frac{e^{-\int \frac{a_1(x)}{a_o(x)}\,dx}}{\left[y_1(x)\right]^2}\,dx + Ky_1$$

pero como y_1 es solución de $L_2[y]= 0$ entonces Ky_1 tambien lo es y como buscamos la segunda solución de $L_2[y] = 0$ entonces hacemos $K = 0$ y $C = 1$ y la expresión que encontramos es la segunda solución de $L_2[y]= 0$ en I.

c) Como el cociente entre y_1 y y_2 no es una constante pues depende de x entonces y_2 , y_1 son Linealmente Independientes.

EJERCICIOS 4.3.

1) Sean las funciones $y_1(x) = x^4$ y $y_2(x) = x^3|x|$ definidas en los Reales
   a) Demostrar que las funciones antes definidas son L.I. en los Reales.
   b) Demostrar que $W(x,y_1,y_2) = 0$ para cada x de los Reales.
2) Sean las funciones y_1, y_2 continuas en un intervalo I. El determinante de Gram de las funciones y_1, y_2 es definido en I como

$$G = \begin{vmatrix} \int_a^b y_1(x)^2 dx & \int_a^b y_1(x)y_2(x)dx \\ \int_a^b y_2(x)y_1(x)dx & \int_a^b y_2(x)^2 dx \end{vmatrix} \qquad I = [a,b]$$

Demostrar que una condición suficiente y necesaria para que las funciones y_1, y_2 sean L.D. es que $G = 0$

Use el resultado anterior para demostrar que las funciones $y_1(x) = e^x$ y $y_2(x) = e^{x+2}$ son L.D. en $[0,1]$ De que otra forma podría demostrar que estas funciones son L.D?

3) Sea el operador $L_2[y] = a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y$ donde $a_0(x), a_1(x)$ y $a_2(x)$ son continuas en $I=[a,b]$ y $a_0(x) \neq 0$ para cada x de I. Sean las funciones u y v dos veces diferenciables en I. Observamos que

$$uL_2[v] - vL_2[u] = a_0(x)(uv'' - vu'') + a_1(x)(uv' - vu')$$

Entonves $$uL_2[v] - vL_2[u] = a_0(x)\frac{d}{dx}W(x,u,v) + a_1(x)\,W(x,u,v)$$

esta fórmula es conocida como fórmula de Lagrange. Decimos que el operador L es auto adjunto si $L_2[y] = [a_0(x)y']' + a_2(x)y$

entonces el operador L es auto adjunto si $a_1(x) = a_0'(x)$

   a) Utilice el resultado de $uL_2[v] - vL_2[u]$ para demostrar que si el operador L es auto adjunto entonces

$$\int_a^b \left\{uL_2[v] - vL_2[u]\right\}dx = a_0(x)W(x,u,v)\Big]_a^b$$

   Esta fórmula es conocida como fórmula de Green y juega un papel muy importante en la teoría y aplicaciones de las E.D.

   b) Utilice el resultado $uL_2[v] - vL_2[u]$ para demostrar que si el operador L es auto adjunto y u(x) y v(x) son soluciones de $L_2[y] = a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0$ en el intervalo I, entonces $a_0(x)W(x,u,v) = C$ para cada x de I donde C es constante.

   c) Supongamos que y_1, y_2 son soluciones de la ecuación $(\ln x)y'' + x^{-1}y' + x^2y = 0$ en $I = R$. Demostrar que $W(x,y_1,y_2) = C(\ln x)^{-1}$.

4) Encontrar la segunda solución de cada una de las siguientes E.D.
   a) $x^2y'' - 2xy' + (2 - x^2)y = 0$ $\quad y_1 = xe^x$ I=Reales positivos
   b) $x^2y'' - 7xy' + 15y = 0$ $\quad y_1 = x^3$ I=Reales positivos
   c) $(x^2 - x)y'' + (x + 1)y' - y = 0$ $\quad y_1 = 1 + x$ I= (0,1)

5) La E.D. $$(1 - x^2)y'' - 2xy' + n(n + 1)y = 0$$
es llamada Ecuación de Legendre, donde n es constante. Las funciones que satisfacen la ecuación de Legendre son llamadas funciones de Legendre de orden n. Cuando n es cero o un número positivo la ecuación de Legendre tiene soluciones polinomiales. Los polinomios de Legendre son denotados por $P_n(x)$. La ecuación de Legendre juega un papel importante en problemas de Temperatura y Electrostática en regiones esféricas.

Cuando $n = 0$ la ecuación de Legendre se convierte en
$$(1 - x^2)y'' - 2xy' = 0$$
El polinomio de Legendre $P_0(x) = 1$ es claramente una solución de la E.D. de Legendre para $n = 0$.

Cuando $n = 1$ La E.D. de Legendre se convierte en
$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0$$
y $P_1(x) = x$ es solución de dicha E.D.

Verifique que los polinomios de Legendre $P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$, $P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$ y $P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3)$ son soluciones de la E.D. de Legendre para $n = 2$, 3 y 4 respectivamente en $I = (-1,1)$

Son los polinomios de Legendre L.I. en $[-1,1]$? Analice para $n = 0,1,2,3$ y 4.

Para los polinomios de Legendre $P_k(x)$, $k = 0,1,2,3$ y 4 verifique que
$$\int_{-1}^{1} P_m(x)P_n(x)dx = 0 \qquad m \neq n \quad m,n = 0,1,2,3,4$$

Sea el operador L definido por $L_2\, y = (1 - x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y$

Demostrar que el operador L es auto adjunto.

Para los polinomios de Legendre $P_n(x)$, $n = 0,1,2,3,4$ verifique que $\int_{-1}^{1} \left[P_n(x)\right]^2 dx = \frac{2}{2n + 1}$

Determine los valores de C_0, C_1, C_2, C_3 y C_4 tales que $3 + 8x - 6x^2 + 40x^3 + 35x^4 = C_0P_0(x) + C_1P_1(x) + C_2P_2(x) + C_3P_3(x) + C_4P_4(x)$ (Este resultado puede extenderse a un polinomio de grado n en el sentido que todo polinomio de grado n puede expresarse como una combinación lineal de polinomios de Legendre)

6) La E.D. de Bessel para $n = \frac{1}{2}$ está dada por $x^2y'' + xy' + (x^2 - \frac{1}{4})y = 0$ verifique que las funciones $J_{-1/2} = (2/x)^{1/2}\cos x$ y $J_{1/2}(x) = (2/x)^{1/2}\operatorname{sen} x$ son soluciones de dicha E.D.

La E.D. de Bessel juega un papel muy importante en matemáticas aplicadas especialmente en problemas de temperatura y electrostática en regiones cilíndricas y está dada por $x^2y'' + xy' + (x^2 - n^2)y = 0$ donde n puede tomar cualquier valor, positivo o negativo, entero o racional incluso complejo.

4.4 E. D. L. HOMOGENEA DE ORDEN n CON COEFICIENTES CONSTANTES.

Consideremos la E.D.L. dada por

$$a_0y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + \ldots\ldots\ldots\ldots + a_{n-1}y' + a_ny = 0$$

donde $a_0, a_1, \ldots\ldots, a_{n-1}, a_n$ son reales y cpnstantes y $a_0 \neq 0$.

Sabemos que

$$y = e^{mx}$$

es solución de la E.D. dada si

$$P(m) = 0$$ Ec. característica

donde

$$P(m) = a_0m^n + a_1m^{n-1} + \ldots\ldots\ldots + a_{n-1}m + a_n$$

ésta ecuación es llamada ecuación característica o ecuación auxiliar de la E.D.L. de orden n.

La forma de las soluciones de la E.D.L.Homogénea de orden n con coeficientes constantes, que denotaremos por

$$P(D)[y] = 0$$

depende de la naturaleza de las raíces de la ecuación característica $P(m) = 0$. Cuando el grado de la ecuación $P(m) = 0$ es mayor o igual a tres, a menudo es difícil encontrarle sus raíces.

Supongamos que $m_1, m_2, \ldots\ldots, m_n$ son las raíces de la ecuación característica, entonces se pueden presentar los siguientes casos:

CASO 1. Las raíces de $P(m) = 0$ son reales y distintas.

CASO 2. Las raíces de $P(m) = 0$ son reales pero algunas de ellas tienen multiplicidad mayor que uno.

CASO 3. Todas las raíces de $P(m) = 0$ son complejas pero algunas de ellas son de multiplicidad mayor que uno.

Con respecto al caso 1 tenemos:

Teorema.4.4.1.- Consideremos la E.D.L.Homogénea de orden n con coeficientes constantes $P(D)[y] = 0$. Sean $m_1, m_2, \ldots, m_n$ las raíces de $P(m) = 0$ y supongamos que éstas raíces sean reales y distintas. Entonces la solución general de $P(D)[y] = 0$ en el intervalo $I = (-\infty, \infty)$ es dada por la expresión

$$y(x) = c_1e^{m_1x} + c_2e^{m_2x} + \ldots\ldots + c_ne^{m_nx}$$

donde $c_1, c_2, \ldots\ldots, c_n$ son constantes arbitrarias.

Prueba. Como $m_1, m_2, \ldots, m_n$ son raíces de $P(m) = 0$, las funciones $y_1(x) = e^{m_1x}$, $y_2(x) = e^{m_2x}$, $\ldots\ldots\ldots$, $y_n(x) = e^{m_nx}$ son soluciones de la E.D. dada por $P(D)\,y = 0$ (véase Ej.4.2.8.) Por Ej.4.3.8. sabemos que estas n funciones son L.I. en $I = (-\infty, \infty)$. Por tanto la solución general de la E.D. dada es

$$y(x) = c_1e^{m_1x} + c_2e^{m_2x} + \ldots\ldots + c_ne^{m_nx}$$

donde $c_1, c_2, \ldots\ldots, c_n$ son constantes arbitrarias.

Ej.4.4.1.- Hallar la solución general de la siguiente E.D.

$$\frac{d^3y}{dx^3} - 2\frac{d^2y}{dx^2} - 3\frac{dy}{dx} = 0$$

Esta E.D; puede escribirse como

$$(D^3 - 2D^2 - 3D)y = 0$$

La ecuación auxiliar es

$$P(m) = m^3 - 2m^2 - 3m = m(m^2 - 2m - 3) = m(m + 1)(m - 3)$$

por tanto sus raíces son 0,-1,3 que son reales y distintas,entonces por Teorema.4.4.1. la solución general es

$$y(x) = c_1 + c_2e^{-x} + c_3e^{3x}$$

Antes de considerar el <u>caso 2</u> recordemos algunos conceptos básicos de la teoría de ecuaciones.Sea $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots\dots + a_{n-1}x + a_n$ donde $a_0,a_1,\dots$ $\dots,a_n$ son constantes y $a_0 \neq 0$.Denotemos las raíces de $f(x)$ por $r_1,r_2,\dots,r_n$ entonces la función dada la podemos expresar como

$$f(x) = a_0(x - r_1)(x - r_2)\dots\dots\dots\dots(x - r_n)$$

Los n factores lineales $x - r_1, x - r_2,\dots\dots, x - r_n$ no necesariamente son distintos.Decimos que un número r es raíz de $f(x) = 0$ de multiplicidad k si el factor $x - r$ aparece exactamente k veces en la factorización de f(x).Si tenemos

$$f(x) = (x - 2)(x + 3)(x + 3)(x - 4)(x - 4)(x - 4)$$

que es de grado seis,el número 2 es una raíz simple,-3 es una raíz de multiplicidad 2 y el número 4 es una raíz de multiplicidad 3.

El siguiente Teorema es un resultado de la teoría de ecuaciones.

Teorema.4.4.2.- Sea

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots\dots + a_{n-1}x + a_n$$

donde $a_0,a_1,\dots\dots,a_n$ son constantes y $a_0 \neq 0$.Sea r una raíz de la ecuación $f(x) = 0$.Una condición suficiente y necesaria para que r sea una raíz de multiplicidad k de $f(x) = 0$ es que r sea una raíz de multiplicidad k-1 de la ecuación $f'(x) = 0$.

Ej.4.4.2.- Sea

$$f(x) = x^4 - 7x^3 + 18x^2 - 20x + 8 = 0$$

Demostrar que 2 es una raíz de multiplicidad 3.

Diferenciando la ecuación dada tenemos

$$f'(x) = 4x^3 - 21x^2 + 36x - 20 = 0$$

utilizando el proceso de la división sintética para factorizar f' obtenemos

$$\begin{array}{rrrr|l} 4 & -21 & 36 & -20 & \underline{2} \\ & 8 & -26 & 20 & \\ \hline 4 & -13 & 10 & 0 & \end{array} \qquad \begin{array}{rrr|l} 4 & -13 & 10 & \underline{2} \\ & 8 & -10 & \\ \hline 4 & -5 & 0 & \end{array}$$

entonces

$$f'(x) = 4(x - \frac{5}{4})(x - 2)(x - 2)$$

lo que implica que 2 es una raíz de multiplicidad 2 de $f'(x) = 0$. Entonces por el teorema anterior 2 es una raíz de multiplicidad 3 de $f(x) = 0$.

Con respectoal caso 2 tenemos

Supongamos que en la E.D. $P(D)[y] = 0$ el operador $P(D)$ tiene factores repetidos entonces la ecuación auxiliar $P(m)$ tiene raíces repetidas por lo que el método utilizado en el caso 1 no nos dá la solución general.

Lo anterior índica que tenemos que hallar un método para obtener las k soluciones L.I. que correspondan a las k raíces iguales de la ecuación auxiliar.

Supongamos que la ecuación auxiliar $P(m) = 0$ tiene k raíces iguales $m_1 = m_2 = m_3 = \ldots\ldots = m_k = m$ entonces el operador $P(D)$ debe tener el factor $(D - m)^k$ Deseamos encontrar k funciones L.I. las cuales cumplen $(D - m)^k y = 0$.

Consideremos el efecto que hace $(D - m)$ sobre el producto formado por e^{mx} y una potencia entera de x.

$(D - m)(x^p e^{mx}) = px^{p-1}e^{mx} + mx^p e^{mx} - mx^p e^{mx} = px^{p-1}e^{mx}$

$(D - m)^2(x^p e^{mx}) = (D - m)(px^{p-1}e^{mx}) = p(D - m)(x^{p-1}e^{mx}) = p(p-1)x^{p-2}e^{mx}$

....

$(D - m)^p(x^p e^{mx}) = p!e^{mx}$

$(D - m)^{p+1}(x^p e^{mx}) = (D - m)(p!e^{mx}) = p!me^{mx} - mp!e^{mx} = 0$

entonces para k mayor que p se tiene que

$$(D - m)^k(x^p e^{mx}) = 0$$

en otras palabras

$$(D - m)^k(x^p e^{mx}) = 0 \quad \text{para } p = 0,1,2,\ldots,(k-1)$$

Con este resultado hemos hallado que las funciones $y_p = x^p e^{mx}$ $p = 0,1,2,\ldots\ldots,(k-1)$ son L.I. y son las funciones buscadas.

Ahora estamos en condiciones de escribir la solución general de la E.D. $P(D)y = 0$ en el caso que contenga raíces reales porque a cada raíz distinta m_i se tiene $e^{m_i x}$ como solución de $P(D)y = 0$ y para las raíces $m_1 = m_2 = \ldots\ldots = m_k = m$ estan las soluciones $e^{mx}, xe^{mx}, x^2e^{mx}, \ldots\ldots, x^{k-1}e^{mx}$ y la combinación lineal de todas estas soluciones nos dá la solución general de la E.D. dada.

Nota.4.4.1.- Sea el operador $P(D)$ definido por

$$P(D)y = a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots\ldots + a_{n-1}y' + a_n y$$

donde $a_0, a_1, \ldots\ldots, a_n$ son reales y $a_0 \neq 0$. Entonces

$$P(D)e^{mx} = P(m)e^{mx}$$

Supongamos que m_{k+1} es una raíz de multiplicidad s_{k+1} de $P(m) = 0$

por tanto

$P(m_{k+1}) = 0$, $P'(m_{k+1}) = 0$, ..., $P^{(s_{k+1}-1)}(m_{k+1}) = 0$

$P^{(s_{k+1})}(m_{k+1}) \neq 0$ (porqué?)

Obteniendo la derivada j-ésima parcialmente con respecto a m de $P(m)e^{mx}$ tenemos ,

$$\frac{\partial^j}{\partial m^j}\left[P(m)e^{mx}\right] = \frac{\partial^j}{\partial m^j}\left[P(D)e^{mx}\right] = P(D)\left[\frac{\partial^j}{\partial m^j}e^{mx}\right] = P(D)x^je^{mx}$$

$$= \left[P^{(j)}(m) + \frac{j}{1!}P^{(j-1)}(m)x + \frac{j(j-1)}{2!}P^{(j-2)}(m)x^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + P(m)x^j\right]e^{mx}$$

por tanto las funciones

$$e^{m_{k+1}x} , \; xe^{m_{k+1}x} , \; \ldots\ldots , \; x^{s_{k+1}-1}e^{m_{k+1}x}$$

son soluciones de $P(D)y = 0$.

Teorema.4.4.2.- Consideremos la E.D. $P(D)[y] = 0$ y sean $m_1, m_2, \ldots, m_k$ las raíces reales y diferentes de $P(m) = 0$ y sean $m_{k+1}, m_{k+2}, \ldots\ldots, m_s$ las raíces reales de $P(m) = 0$ de multiplicidad $s_{k+1}, s_{k+2}, \ldots, s_s$ respectivamente donde $s_{k+1} + s_{k+2} + \ldots + s_s = n-k$. Entonces la solución general de $P(D)[y] = 0$ en el intervalo $I = (-\infty, \infty)$ es dada por

$$\begin{aligned} y(x) = {} & b_1e^{m_1x} + b_2e^{m_2x} + \ldots\ldots\ldots\ldots + b_ke^{m_kx} \\ & + (c_1 + c_2x + \ldots\ldots\ldots + c_{s_{k+1}}x^{s_{k+1}-1})e^{m_{k+1}x} \\ & + (d_1 + d_2x + \ldots\ldots\ldots + d_{s_{k+2}}x^{s_{k+2}-1})e^{m_{k+2}x} \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + (g_1 + g_2x + \ldots\ldots\ldots + g_{s_s}x^{s_s-1})e^{m_sx} \end{aligned}$$

donde $b_1, b_2, \ldots\ldots, b_k, c_1, c_2, \ldots, c_{s_{k+1}}, \ldots\ldots; g_1, g_2, \ldots, g_{s_s}$ son constantes arbitrarias.

Ej.4.4.3.- Hallar la solución general de la E.D.

$$(D^4 - 7D^3 + 18D^2 - 20D + 8)y = 0$$

La ecuación auxiliar es

$$m^4 - 7m^3 + 18m^2 - 20m + 8 = 0$$

que factorizada se puede escribir como

$$(m - 1)(m - 2)^3 = 0$$

por tanto la solución general es

$$y = c_1e^x + (c_2 + c_3x \quad c_4x^2)e^{+2x}$$

Con respecto al caso 3 tenemos

Si la ecuación característica tiene raíces complejas conjugadas del tipo $a \pm bi$ las raíces $m_1 = a + bi$ y $m_2 = a - bi$ dan lugar a parte de la solución. Esta parte es

$$Ae^{(a+bi)x} + Be^{(a-bi)x}$$

Pero debido a Euler sabemos que

$$e^{iz} = \cos z + i\operatorname{sen} z$$

$$e^{-iz} = \cos z - i\operatorname{sen} z$$

por tanto

$$\begin{aligned} Ae^{(a+bi)x} + Be^{(a-bi)x} &= Ae^{ax}e^{ibx} + Be^{ax}e^{-ibx} \\ &= Ae^{ax}(\cos bx + i\operatorname{sen} bx) + Be^{ax}(\cos bx - i\operatorname{sen} bx) \\ &= e^{ax}\left[(A+B)\cos bx + (A-B)i\operatorname{sen} bx\right] \\ &= e^{ax}\left[C_1\cos bx + C_2\operatorname{sen} bx\right] \end{aligned}$$

donde $C_1 = A + B$ y $C_2 = (A - B)i$

Si alguna de las raíces complejas es de multiplicidad mayor que uno, su conjugada tambien lo será y por tanto se procede como en el caso 2.

Ej.4.4.4.- Hallar la solución general de

$$y''' + 4y'' + 13y' = 0$$

Esta ecuación puede escribirse como

$$(D^3 + 4D^2 + 13D)y = 0$$

y por tanto su ecuación auxiliar es

$$\begin{aligned} m^3 + 4m^2 + 13m &= m(m^2 + 4m + 13) \\ &= m(m + 2 + 3i)(m + 2 - 3i) = 0 \end{aligned}$$

luego su solución es

$$y(x) = c_1 + c_2e^{-2x}\cos 3x + c_3e^{-2x}\operatorname{sen} 3x$$

Ej.4.4.5.- Hallar la solución general de

$$(D^4 + 8D^2 + 16)y = 0$$

La ecuación auxiliar es

$$(m^4 + 8m^2 + 16) = (m^2 + 4)^2 = (m - 2i)^2(m + 2i)^2 = 0$$

luego su solución es

$$y(x) = (c_1 + c_2x)\cos 2x + (c_3 + c_4x)\operatorname{sen} 2x$$

EJERCICIOS 4.4

1) Resolver
$$\frac{d^2x}{dt^2} + k^2x = 0$$
donde k es real y cuando $t = 0$, $x = 0$ y $\frac{dx}{dt} = v_o$

2) Resolver
$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2b\,\frac{dx}{dt} + k^2x = 0$$
donde k es mayor que b y b es mayor que cero, además cuando $t = 0, x = 0$ y $\frac{dx}{dt} = v_o$.

3) $y^{(4)} - 13y'' + 36y = 0$

4) $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$

5) $y''' - 5y'' + 3y' + 9y = 0$

6) $4y''' - 16y'' - 9y' + 36y = 0$

7) $y^{(4)} - 4y''' + 8y'' - 8y' + 4y = 0$

8) $y''' - 4y'' + y' + 26y = 0$

9) $36y^{(4)} - 12y''' - 11y'' + 2y' + y = 0$

10) $y^{(5)} - y^{(4)} + y''' + 35y'' + 16y' - 25y = 0$

11) Encontrar la solución de la E.D.
$$y''' - 4y' + 2y'' - 8y = 0$$
sujeta a las siguientes condiciones $y(o) = 2$, $y(1) = e^{-2}$ y cuando y tiende a cero x tiende a infinito

12) Encontrar la solución general de la siguiente E.D.
$$y^{(4)} + y''' - 3y'' - 5y' - 2y = 0$$
sujeto a las siguientes condiciones $y(o) = -1$, $y(1) = e^{-1}$, $y(-1) = e$ y cuando x tiende a infinito y tiende a cero.

13) La E.D. $a_0x^ny^{(n)} + a_1x^{n-1}y^{(n-1)} + \ldots\ldots\ldots + a_{n-1}xy' + a_ny = f(x)$ donde $a_0, a_1, \ldots, a_n$ son constantes y $a_0 \neq 0$ y la función $f(x)$ es continua en algún intervalo I es llamada la E.D.Lineal de Cauchy-Euler de orden n. Esta ecuación es conocida con el nombre de ecuación equidimensional.

Considere la transformación $x = e^t$ o $t = \ln x$ para x mayor que cero.

Utilizando la regla de la cadena tenemos
$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{1}{x} = e^{-t}\frac{dy}{dt}$$
$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)\frac{dt}{dx} = \frac{d}{dt}\left(e^{-t}\frac{dy}{dt}\right)\frac{1}{x} = e^{-t}\left(e^{-t}\frac{d^2y}{dt^2} - e^{-t}\frac{dy}{dt}\right)$$
$$= e^{-2t}\left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right)$$

y así proseguimos con las demás derivadas. Demuestre que la transformación $x = e^{-t}$ reduce la E.D. de Cauchy a una E.D. de orden n con coeficientes constantes.

Resuelva los siguientes ejercicios

a) $x^3y''' - 6x^2y'' + 18xy' - 24y = 0$

b) $x^4y^{(4)} + 12x^3y''' + 38x^2y'' + 32xy' + 4y = 0$

c) $x^5y^{(5)} + 10x^4y^{(4)} + 25x^3y''' + 15x^2y'' + xy' = 0$

14) Considere la E.D.

$$a_0(a+bx)^n y^{(n)} + a_1(a+bx)^{n-1} y^{(n-1)} + \dots\dots + a_{n-1}(a+bx)y' + a_n y = \varnothing(x)$$

donde $a_0, a_1, \dots\dots, a_n, a, b$, son constantes y $a_0 \neq 0$, $b \neq 0$. Demostrar que la transformación $a + bx = e^t$ reduce la anterior E.D. a una E.D. Lineal de orden n con coeficientes constantes.

Encuentre la solución general de la siguiente E.D.

$$(4 + x)^4 y^{(4)} + 6(4 + x)^3 y''' + 54(4 + x)^2 y'' - (4 + x)y' + y = 0$$

4.5. ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES NO HOMOGENEAS DE ORDEN n

En la sección anterior vimos que la solución general de la E.D. Lineal

$$(a_0D^n + a_1D^{n-1} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + a_{n-1}D + a_n)y = h(x)$$

es $y = y_c + y_p$ donde y_c (función complementaria) es la solución general de la E.D.L.Homogénea $(a_0D^n + a_1D^{n-1} + \ldots\ldots\ldots\ldots + a_{n-1}D + a_n)y = 0$

y y_p es cualquier solución particular de

$$(a_0D^n + a_1D^{n-1} + \ldots\ldots\ldots + a_{n-1}D + a_n)y = h(x)$$

Teorema.4.5.1.- Si el segundo miembro de la ecuación

$$(a_0D^n + a_1D^{n-1} + \ldots\ldots + a_{n-1}D + a_n)y = h(x)$$

es la suma de varias funciones, $h(x) = \sum_{m=1}^{n} f_m(x)$ y si y_m es una integral particular de

$$(a_0D^n + a_1D^{n-1} + \ldots\ldots\ldots + a_{n-1}D + a_n)y = f_m(x)$$

la suma de las y_m es tambien una solución particular de la E.D dada.

Prueba. Como y_m es solución particular de

$$(a_0D^n + a_1D^{n-1} + \ldots\ldots\ldots + a_{n-1}D + a_n)y = f_m(x) \qquad m = 1,2,\ldots\ldots,n$$

entonces

$$(a_0D^n + a_1D^{n-1} + \ldots\ldots + a_{n-1}D + a_n)y_1 = f_1(x)$$

$$(a_0D^n + a_1D^{n-1} + \ldots\ldots + a_{n-1}D + a_n)y_2 = f_2(x)$$

$$\vdots$$

$$(a_0D^n + a_1D^{n-1} + \ldots\ldots + a_{n-1}D + a_n)y_n = f_n(x)$$

sumando a ambos lados tenemos

$$(a_0D^n + a_1D^{n-1} + \ldots\ldots + a_{n-1}D + a_n)\sum_{m=1}^{n} y_m = \sum_{m=1}^{n} f_m(x) = h(x)$$

por tanto $\sum_{m=1}^{n} y_m$ es una solución particular de la E.D. dada

Estudiaremos varios métodos para obtener una solución particular de

$$(a_0D^n + a_1D^{n-1} + \ldots\ldots + a_{n-1}D + a_n)y = h(x)$$

cuando las a_i $i = 0,1,2,\ldots\ldots,n$ son constantes.

EL METODO DE LOS COEFICIENTES INDETERMINADOS.

Recordemos que las soluciones de las Ecuaciones Diferenciales Homogéneas con coeficientes constantes se hallan cuando encontramos las raíces de $P(m) = 0$ por tanto, si $m = a$ es raíz de $P(m) = 0$ el operador $P(D)$ tiene como factor a $(D - a)$ y en su solución general aparece el término e^{ax}, el término xe^{ax} aparecerá cuando $P(D)$ tiene el factor $(D - a)^2$, el término x^2e^{ax} aparecerá cuando $P(D)$ tiene como factor a $(D - a)^3$, etc, Las expresiones $e^{ax}\cos bx$ o $e^{ax}\operatorname{sen} bx$

corresponden a las raíces $m = a \pm bi$ de $P(m) = 0$ que corresponde al factor $(D - a)^2 + b^2$ de $P(D)$.

Veamos ahora como encontrar una E.D.L.Homogénea a partir de una función dada.

Ej.4.5.1.- Hallar una E.D.L.Homogénea con coeficientes constantes que tenga como solución particular a la expresión $y = 7e^{3x} + 2x$.

La E.D. buscada se satisface con una expresión de la forma $y = c_1e^{3x} + c_2x$.

El término c_1e^{3x} proviene de la raíz $m = 3$ de la ecuación auxiliar, luego $(D - 3)$ es un factor de $P(D)$.

El término c_2x aparece cuando la ecuación auxiliar tenga a $m = 0$ como raíz de multiplicidad dos. Esto implica que $P(D)$ tiene como factor a la expresión D^2.

Luego la E.D.L.Homogénea más pequeña que tiene como solución a la expresión $y = c_1e^{3x} + c_2x$ es $D^2(D - 3)y = 0$ y por tanto $y= 7e^{3x} + 2x$ es una solución particular de dicha E.D.

Ej.4.5.2.- Hallar una E.D.L.Homogénea con coeficientes constantes que sea satisfecha por $y = 6 + 3xe^x - \cos x$

El término 6 proviene de la raíz $m = 0$ de la ecuación auxiliar $P(m)= 0$

El término $3xe^x$ proviene de la raíz $m = 1$ de multiplicidad dos de la ecuación auxiliar $P(m) = 0$.

El término $\cos x$ proviene de las raíces $m = \pm i$ de la ecuación auxiliar $P(m) = 0$.

Por tanto la ecuación auxiliar es $m(m-1)^2(m^2+1) = 0$ lo que implica que

$$P(D) = D(D - 1)^2(D^2 + 1)$$

entonces la E.D.L.Homogénea con coeficientes constantes es

$$D(D - 1)^2(D^2 + 1)y = (D^5 - 2D^4 + 2D^3 - 2D^2 + D)y = 0$$

Ej.4.5.3.- Hallar una E.D.L.Homogénea con coeficientes constantes la cual sea satisfecha por $y = 4xe^x \operatorname{sen} 2x$.

La ecuación auxiliar debe tener por raíces a $m = 1 \pm 2i$ de multiplicidad dos que corresponde al factor $(m-1)^2 + 4$. Luego la E.D. buscada es

$$\left[(D - 1)^2 + 4\right]^2y = (D^4 - 4D^3 + 14D^2 - 20D + 25)y = 0$$

Nota.4.5.1.- Otra solución correcta en los ejemplos anteriores puede obtenerse insertando raíces adicionales a la ecuación auxiliar.

Ahora veamos como encontrar la solución general de una E.D.L. no Homogénea usando el método de los COEFICIENTES INDETERMINADOS por medio de un ejemplo.

Ej.4.5.4.- Hallar la solución general de la E.D.

$$D^2(D - 1)y = 3e^x + \operatorname{sen} x$$

Primero hallamos la solución general de la E.D.L.Homogénea

$$D^2(D - 1)y = 0$$

La función complementaria puede determinarse de inmediato pues

$$P(m) = m^2(m - 1) = 0$$

cuyas raíces son $m = 0$ de multiplicidad dos

$$m = 1$$

por tanto la función complementaria es

$$y_c = c_1 + c_2x + c_3e^x$$

Como la solución general de la E.D.L. dada es $y = y_c + y_p$ todo lo que resta por hallar es y_p donde $h(x) = 3e^x + \text{sen } x$ es una solución particular de una E.D.L.Homogénea.Esta E.D.L.Homogénea que buscamos tiene en su ecuación auxiliar las raíces $m = 1$ y $m = \pm i$ lo que implica que

$$P(m) = (m-1)(m^2+1) = 0$$

o sea que la E.D.L.Homogénea buscada es

$$(D - 1)(D^2 + 1)h(x) = 0$$

pero $\qquad h(x) = 3e^x + \text{sen } x = D^2(D - 1)y$

entonces

$$(D - 1)(D^2 + 1)\overbrace{D^2(D - 1)y}^{h(x)} = 0$$

Obsérvese que cualquier solución de

$$D^2(D - 1)y = 3e^x + \text{sen } x$$

es solución particular de

$$(D - 1)(D^2 + 1)D^2(D - 1)y = 0$$

además,la solución general de

$$D^2(D - 1)y = 3e^x + \text{sen } x$$

es una solución particular de

$$(D - 1)(D^2 + 1)D^2(D - 1)y = 0$$

La solución general de

$$(D - 1)(D^2 + 1)D^2(D - 1)y = D^2(D - 1)^2(D^2 + 1)y = 0$$

se obtiene de las raíces de

$$P(m) = m^2(m - 1)^2(m^2 + 1) = 0$$

que son: $m = 0$ de multiplicidad dos

$m = 1$ de multiplicidad dos y

$m = \pm i$

por tanto $\quad y_c = c_1 + c_2x + c_3e^x + c_4xe^x + c_5\cos x + c_6\text{sen } x$

Pero la solución general de la E.D. dada es $\boxed{y = y_c + y_p}$ por lo que

$$\boxed{y_p = c_4xe^x + c_5\cos x + c_6\text{sen } x}$$

ahora bien, $\qquad D^2(D - 1)y = 3e^x + \text{sen } x$

se satisface para y_p por tanto

$$Dy_p = c_4(xe^x + e^x) - c_5\text{sen } x + c_6\cos x$$

$D^2y_p = c_4(xe^x + 2e^x) - c_5\cos x - c_6\text{sen } x$

$D^3y_p = c_4(xe^x + 3e^x) + c_5\text{sen } x - c_6\cos x$

luego

$$D^2(D - 1)y_p = (D^3 - D^2)y_p = c_4(xe^x + 3e^x) + c_5\text{sen } x - c_6\cos x$$
$$- c_4(xe^x + 2e^x) + c_5\cos x + c_6\text{sen } x$$
$$= 3e^x + \text{sen } x$$

o sea que

$$c_4e^x + (c_5 + c_6)\text{sen } x + (c_5 - c_6)\cos x = 3e^x + \text{sen } x$$

de donde concluímos que

$$c_4 = 3 \quad , \quad c_5 + c_6 = 1 \quad , \quad c_5 - c_6 = 0$$

lo anterior ímplica que $c_5 = c_6$ o sea que $c_5 = c_6 = 1/2$

por tanto

$$y_p = 3xe^x + \frac{1}{2}\cos x + \frac{1}{2}\text{sen } x$$

y la solución general es

$$y = c_1 + c_2x + c_3e^x + 3xe^x + \frac{1}{2}\cos x + \frac{1}{2}\text{sen } x$$

RESUMEN. Dada $P(D)[y] = h(x)$ se encuentran los valores de m para hallar y_c y y_p; despues se sustituye y_p en la E.D. dada, se igualan los coeficientes respectivos y se obtienen los valores numéricos de los coeficientes de y_p y despues se escribe la solución general $y = y_c + y_p$

Nota.4.5.2.- El método antes descrito es aplicable cuando (y solo cuando) la expresión h(x) es ella misma una solución particular de alguna E.D. L. Homogénea con coeficientes constantes.

Las posibles formas de h(x) son: Combinación lineal de las siguientes funciones

a) Funciones exponenciales de la forma e^{ax}
b) Funciones polinómicas
c) Funciones trigonométricas en sen y cos
d) Producto de funciones polinómicas y exponenciales
e) Producto de funciones polinómicas y sen o cos
f) Producto de funciones exponenciales y sen ó cos
g) Producto de funciones exponenciales, polinómicas y trigonométricas en sen o cos
h) Funciones Hiperbólicas (caso particular de las funciones exponenciales senh y cosh)

Ej.4.5.5.- Resolver la E.D. $(D^2 + D - 2)y = 2x - 40\cos 2x$

Primero hallemos la solución general de la E.D.L.Homogénea.

$P(m) = m^2 + m - 2 = 0$ y sus raíces son $m=1,-2$ por tanto

$$y_c = c_1e^x + c_2e^{-2x}$$

$h(x) = 2x - 40\cos 2x$ es una solución particular de alguna E.D.L.Homogénea donde $m = 0$ es de multiplicidad dos y $m = \pm 2i$ son las raíces de la ecuación auxiliar,luego

$$D^2(D^2 + 4)h(x) = 0$$

o sea $D^2(D^2 + 4)h(x) = D^2(D^2 + 4)(D^2 + D - 2)y = 0$

lo que implica que

$$y_c = d_1 + d_2x + d_3e^x + d_4e^{-2x} + d_5\cos 2x + d_6\text{sen } 2x$$

de donde se obtiene que

$$y_p = d_1 + d_2x + d_5\cos 2x + d_6\text{sen } 2x$$

luego

$$Dy_p = d_2 - 2d_5\text{sen } 2x + 2d_6\cos 2x$$

$$D^2y_p = -4d_5\cos 2x - 4\, d_6\text{sen } 2x$$

entonces

$$\begin{aligned}(D^2 + D - 2)y_p &= -4d_5\cos 2x - 4d_6\text{sen } 2x + d_2 - 2d_5\text{sen } 2x + 2d_6\cos 2x \\ &\quad - 2d_1 - 2d_2x - 2d_5\cos 2x - 2d_6\text{sen } 2x \\ &= (-6d_5 + 2d_6)\cos 2x + (-6d_6 - 2d_5)\text{sen } 2x + (-2d_2)x \\ &\quad + (d_2 - 2d_1) \\ &= 2x - 40\cos 2x\end{aligned}$$

de lo anterior se concluye que

$$-6d_5 + 2d_6 = -40 \quad , \quad -6d_6 - 2d_5 = 0 \quad , \quad -2d_2 = 2 \quad , \quad d_2 - 2d_1 = 0$$

obteniendose $d_2 = -1$, $d_1 = -\frac{1}{2}$, $d_5 = 6$, $d_6 = -2$

y la solución general es

$$y = c_1e^x + c_2e^{-2x} - \frac{1}{2} - x + 6\cos 2x - 2\text{sen } 2x$$

Ej.4.5.6.- Aplicando el procedimiento anterior a la E.D.

$$(D^2 + 1)y = \text{sen } x$$

se obtiene como solución general a la expresión

$$y = c_1\cos x + c_2\text{sen } x - \frac{1}{2}\, x\cos x$$

EL METODO DE LA VARIACION DE PARAMETROS

Como se sabe, el método de los coeficientes indeterminados solo es eficaz cuando el segundo miembro de la E.D. es de un tipo particular. Es natural que nos preguntemos si hay otros procedimientos para resolver una E.D. de orden n cuando el segundo miembro presenta formas no similares a las ya vistas. Fué Joseph Luis Lagrange (1.736 - 1.813) quien dió respuesta posistiva al problema. El método inventado por Lagrange se conoce con el nombre de variación de para'metros.

Primero vamos a justificar teóricamente el método y luego resolveremos algunos ejemplos.

Teorema.4.5.2.- Si $$y_c = c_1y_1 + c_2y_2 + \cdots\cdots + c_ny_n = \sum_{i=1}^{n} c_iy_i$$

es solución general de

$$P(D)[y] = (a_0D^n + a_1D^{n-1} + \cdots\cdots + a_{n-1}D + a_n)y = h(x)$$

donde las a_i $i = 0, 1, 2, \ldots\ldots, n$ son funciones continuas definidas en un intervalo I y $a_0 \neq 0$. Entonces

$$y = r_1y_1 + r_2y_2 + \cdots\cdots\cdots + r_ny_n = \sum_{i=1}^{n} r_iy_i$$

es una solución particular de la E.D. dada si las r_i $i = 0, 1, 2, \ldots\ldots\ldots, n$ satisfacen las siguientes condiciones

$$\begin{aligned}
r_1'y_1 + r_2'y_2 + \cdots\cdots\cdots + r_n'y_n &= 0\\
r_1'y_1' + r_2'y_2' + \cdots\cdots\cdots + r_n'y_n' &= 0\\
\vdots \qquad \vdots \qquad\qquad & \vdots\\
r_1'y_1^{(n-2)} + r_2'y_2^{(n-2)} + \cdots\cdots + r_n'y_n^{(n-2)} &= 0\\
r_1'y_1^{(n-1)} + r_2'y_2^{(n-1)} + \cdots\cdots + r_n'y_n^{(n-1)} &= Q(x)
\end{aligned}$$

donde $Q(x) = \dfrac{h(x)}{a_0}$

Prueba. $y = r_1y_1 + r_2y_2 + \cdots\cdots + r_ny_n = \sum_{i=1}^{n} r_iy_i$

$$Dy = r_1y_1' + r_2y_2' + \cdots\cdots + r_ny_n' + r_1'y_1 + r_2'y_2 + \cdots\cdots + r_n'y_n$$
$$= \sum_{i=1}^{n} r_iy_i' + \sum_{i=1}^{n} r_i'y_i = \sum_{i=1}^{n} r_iy_i' \qquad \text{porque} \quad \sum_{i=1}^{n} r_i'y_i = 0$$

$$D^2y = r_1y_1'' + r_2y_2'' + \cdots\cdots + r_ny_n'' + r_1'y_1' + r_2'y_2' + \cdots\cdots + r_n'y_n'$$
$$= \sum_{i=1}^{n} r_iy_i'' + \sum_{i=1}^{n} r_i'y_i' = \sum_{i=1}^{n} r_iy_i'' \qquad \text{porque} \sum_{i=1}^{n} r_i'y_i' = 0$$

$$\vdots$$

$$D^{(n-1)}y = \sum_{i=1}^{n} r_iy_i^{(n-1)}$$

$$D^ny = \sum_{i=1}^{n} r_iy_i^{(n)} + Q(x)$$

luego

$$P(D)[y] = a_0\sum_{i=1}^{n} r_i y_i^{(n)} + Q(x)a_0 + a_1\sum_{i=1}^{n} r_i y_i^{(n-1)} + \cdots\cdots\cdots$$
$$+ a_{n-1}\sum_{i=1}^{n} r_i y_i' + a_n\sum_{i=1}^{n} r_i y_i$$
$$= r_1(a_0 y_1^{(n)} + a_1 y_1^{(n-1)} + \cdots\cdots + a_{n-1} y_1' + a_n y_1) +$$
$$r_2(a_0 y_2^{(n)} + a_1 y_2^{(n-1)} + \cdots\cdots + a_{n-1} y_2' + a_n y_2) +$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots +$$
$$r_n(a_0 y_n^{(n)} + a_1 y_n^{(n-1)} + \cdots\cdots + a_{n-1} y_n' + a_n y_n) + h(x)$$
$$= h(x)$$

por ser $y_1, y_2, \ldots, y_n$ soluciones de $P(D)[y] = 0$

por tanto

$$\sum_{i=1}^{n} r_i y_i$$

es solución de la E.D. dada.

Ej.4.5.7.- Resolver

$$y'' + y = \operatorname{tg} x$$

La ecuación complementaria es $y'' + y = 0$ lo que implica que $P(m) = m^2 + 1 = 0$ o sea que $m = \pm i$ y por tanto $y_c = A\cos x + B\operatorname{sen} x$

El método de Lagrange supone A y B funciones de x o sea que

$y = A(x)\cos x + B(x)\operatorname{sen} x$

$y' = -A(x)\operatorname{sen} x + B(x)\cos x + A'(x)\cos x + B'(x)\operatorname{sen} x$ en donde

$A'(x)\cos x + B'(x)\operatorname{sen} x = 0$ (1) luego $y' = -A(x)\operatorname{sen} x + B(x)\cos x$

$y'' = -A(x)\cos x - B(x)\operatorname{sen} x - A'(x)\operatorname{sen} x + B'(x)\cos x$ en donde

$-A'(x)\operatorname{sen} x + B'(x)\cos x = \operatorname{tg} x$ (2)

De (1) obtenemos $A'(x) = -B'(x)\operatorname{tg} x$ y reemplazando en (2) encontramos $B'(x)\operatorname{tg} x \operatorname{sen} x + B'(x)\cos x = \operatorname{tg} x$

$$B'(x)\,\frac{\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x}{\cos x} = B'(x)\sec x = \operatorname{tg} x$$

por tanto $B'(x) = \operatorname{sen} x$

luego $B(x) = -\cos x$

pero $A'(x) = -B'(x)\operatorname{tg} x$

o sea que $A'(x) = -\operatorname{sen}^2 x \sec x$

entonces $A(x) = \operatorname{sen} x - \operatorname{Ln}|\sec x + \operatorname{tg} x|$

y la solución buscada es

$$y_p = A(x)\cos x + B(x)\operatorname{sen} x$$
$$= [\operatorname{sen} x - \operatorname{Ln}|\sec x + \operatorname{tg} x|]\cos x - \cos x \operatorname{sen} x$$

luego la solución general es

$$y = A\cos x + B\operatorname{sen} x + \left[\operatorname{sen} x - \operatorname{Ln}|\sec x + \operatorname{Tg} x|\right]\cos x - \cos x \operatorname{sen} x$$

$$= A\cos x + B\operatorname{sen} x - \cos x \operatorname{Ln}|\sec x + \operatorname{tg} x|$$

Ej.4.5.8.- Resolver $(D^2 - 6D + 9)y = e^{3x}/x^2$

La función complementaria es $y_c = c_1e^{3x} + c_2xe^{3x}$ pues la ecuación característica tiene la raíz tres de multiplicidad dos.

Sea $y_p = r_1e^{3x} + r_2xe^{3x}$

$Dy_p = 3(r_1 + r_2)e^{3x} + 3r_2xe^{3x} + r_1'e^{3x} + r_2'xe^{3x}$ donde

$r_1'e^{3x} + r_2'xe^{3x} = 0$ (1)

$D^2y_p = (9r_1 + 6r_2)e^{3x} + 9r_2xe^{3x} + (3r_1' + r_2')e^{3x} + 3r_2'xe^{3x}$ donde

$(3r_1' + r_2')e^{3x} + 3r_2'xe^{3x} = e^{3x}/x^2$ (2)

de (1) y (2) obtenemos $r_1 = -\operatorname{Ln} x$, $r_2 = -x^{-1}$

luego $y_p = -e^{3x}\operatorname{Ln} x - e^{3x}$

Solución general

$$y = c_1e^{3x} + c_2xe^{3x} - e^{3x}\operatorname{Ln} x - e^{3x}$$

$$= (c_1 - 1)e^{3x} + c_2xe^{3x} - e^{3x}\operatorname{Ln} x$$

EL METODO OPERACIONAL.

Se sabe que una E.D.L. con coeficientes constantes de orden n es de la forma

$$P(D)[y] = (a_0D^n + a_1D^{n-1} + \dots\dots\dots + a_{n-1}D + a_n)y = h(x)$$

Sabemos tambien que los operadores polinómicos conmutan para el producto y tambien satisfacen la ley distributiva con respecto a la suma o sea que

$P_1(D)P_2(D) = P_2(D)P_1(D)$ y

$P(D)[P_1(D) + P_2(D)] = P(D)P_1(D) + P(D)P_2(D)$

Definamos ahora el "operador inverso de P(D)"

Def.4.5.1.- Si $P(D)[y] = h(x)$ la solución a esta ecuación es el resultado de aplicar el operador inverso de P(D) a h(x)

Denotaremos el "operador Inverso de P(D)" por $\frac{1}{P(D)}$

En otras palabras

$$P(D)[y] = h(x) \text{ si y solo si } y = \frac{1}{P(D)}h(x)$$

Sabemos que el producto de dos operadores, en nuestro caso B(D) y $\frac{1}{P(D)}$ se determina mediante la igualdad

$$\left[B(D)\cdot\frac{1}{P(D)}\right]h(x) = B(D)\left[\frac{1}{P(D)}h(x)\right]$$

Veamos ahora cual es el significado de $\frac{1}{P(D)}$

Sea la ecuación $Dy = x$ que tiene por solución a $y = \int x\,dx$ pero $y = \frac{1}{D}x$ de donde se deduce que $\frac{1}{D}$ significa "tomar el integral", del mismo modo $\frac{1}{D^2}$ significa doble integración y de esta manera podemos generalizar que

$\frac{1}{D^n} h(x)$ significa integrar n veces la función h(x)

Consideremos ahora las siguientes E.D.

1) $a_0 \frac{dy}{dx} + a_1 y = f(x) \quad a_0 \neq 0$

Dividiendo la expresión anterior por a_0 obtenemos

$$\frac{dy}{dx} - m_1 y = F(x) \qquad \text{donde } m_1 = -\frac{a_1}{a_0} \quad \text{y } F(x) = \frac{f(x)}{a_0}$$

$(D - m_1)y = F(x)$ de donde $y = \frac{1}{D - m_1} F(x)$ es la solución de la E.D.

pero $y' - m_1 y = F(x)$ es una E.D.L. de primer orden que tiene por factor de integración a la expresión $e^{-m_1 x}$, por tanto

$$\frac{d}{dx}(e^{-m_1 x} y) = e^{-m_1 x} F(x)$$

lo que implica que
$$e^{-m_1 x} y = \int e^{-m_1 x} F(x)\,dx$$

luego
$$y = e^{m_1 x} \int e^{-m_1 x} F(x)\,dx$$

Conclusión
$$\frac{1}{D - m_1} F(x) = e^{m_1 x} \int e^{-m_1 x} F(x)\,dx$$

2) $a_0 \frac{d^2 y}{dx^2} + a_1 \frac{dy}{dx} + a_2 y = f(x) \qquad a_0 \neq 0$

Dividiendo la expresión anterior por a_0 tenemos

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + b_1 \frac{dy}{dx} + b_2 y = F(x) \quad \text{donde } b_1 = \frac{a_1}{a_0}, \; b2 = \frac{a_2}{a_0}, \; F(x) = \frac{f(x)}{a_0}$$

Esta última expresión puede escribirse como

$(D - m_1)(D - m_2)y = F(x)$ donde m_1 y m_2 son las raíces de $m^2 + b_1 m + b_2 = 0$

luego

$$y = \frac{1}{(D - m_1)(D - m_2)} F(x) = \frac{1}{D - m_1}\left[\frac{1}{D - m_2} F(x)\right]$$
$$= \frac{1}{D - m_1}\left[e^{m_2 x}\int e^{-m_2 x} F(x)\,dx\right]$$
$$= e^{m_1 x}\int\left\{e^{-m_1 x}\left[e^{m_2 x}\int e^{-m_2 x} F(x)\,dx\right]\right\}dx$$

En forma similar se obtiene una fórmula para cuando se tienen mas de dos factores lineales de la forma $(D - m_i)$ $i = 1,2,\ldots\ldots,n$.

Este resultado se puede usar para hallar soluciones de las E.D. si los m_i son iguales. Si los m_i son diferentes conviene usar las fracciones parciales.

$$\frac{1}{(D-m_1)(D-m_2)\ldots\ldots\ldots(D-m_n)} F = \frac{A_1}{D - m_1}F + \frac{A_2}{D - m_2}F + \ldots\ldots + \frac{A_n}{D - m_n} F$$
$$= A_1 e^{m_1 x}\int e^{-m_1 x} F(x)\,dx + A_2 e^{m_2 x}\int e^{-m_2 x} F(x)\,dx + \ldots\ldots\ldots + A_n e^{m_n x}\int e^{-m_n x} F(x)\,dx$$

Esta es la representación mas sencilla ya que solo contiene integrales simples.

Ej.4.5.9.- Hallar la solución general de
$$(D^2 - 1)y = e^{-x}$$

Aplicando el operador inverso de P(D) tenemos

$$y_p = \frac{1}{(D-1)(D+1)}\, e^{-x} = \frac{1}{D-1}\left[\frac{1}{D+1}\, e^{-x}\right] = \frac{1}{D-1}\left[e^{-x}\int e^{x}e^{-x}dx\right] = \frac{1}{D-1}\left[xe^{-x}\right]$$
$$= e^{x}\int e^{-x}xe^{-x}dx = -\frac{1}{2}\,xe^{-x} - \frac{1}{4}\,e^{-x}$$

Como $y_c = Ae^{x} + Be^{-x}$ entonces la solución general es
$$y = Ae^{x} + (B - \tfrac{1}{4})e^{-x} - \tfrac{1}{2}\,xe^{-x}$$

Ej.4.5.10.- Hallar una solución particular de
$$(D^2 + 4D + 4)y = x^3e^{-2x}$$

La E.D. dada se convierte en $(D + 2)^2y = x^3e^{-2x}$

$$y_p = \frac{1}{(D+2)^2}\, x^3e^{-2x} = \frac{1}{D+2}\left[\frac{1}{D+2}\, x^3e^{-2x}\right] = \frac{1}{D+2}\left[e^{-2x}\int e^{2x}x^3e^{-2x}dx\right]$$
$$= \frac{1}{D+2}\left[e^{-2x}\ \frac{x^4}{4}\right] = e^{-2x}\int e^{2x}e^{-2x}\,\frac{x^4}{4}\,dx = e^{-2x}\,\frac{x^5}{20}$$

Teorema.4.5.3.- Si P(D) es un operador Polinomial y m es una constante cualquiera entonces $\quad P(D)e^{mx} = e^{mx}P(m)$

Prueba. Sea $y = e^{mx}$, $Dy = me^{mx}$, $D^2y = m^2e^{mx}$, ..., $D^iy = m^ie^{mx}$ $i = 0,1,2,$ ...., n entonces

$$P(D)e^{mx} = (a_0D^n + a_1D^{n-1} + \dots + a_{n-1}D + a_n)e^{mx} = \sum_{i=0}^{n} a_iD^{n-i}e^{mx}$$
$$= e^{mx}\sum_{i=0}^{n} a_im^{n-i} = e^{mx}\,P(m)$$

Corolario.4.5.1.- $\quad \frac{1}{P(D)}\,e^{mx} = e^{mx}\,\frac{1}{P(m)}\quad$ si $P(m) \neq 0$

Prueba.

$y = e^{mx}/P(m)$ es solución de $P(D)y = e^{mx}$ ya que $P(D)_{(e^{mx}/P(m))}$
$= \frac{e^{mx}P(m)}{P(m)} = e^{mx}$ pero $P(D)y = e^{mx}$ implica que $y = \frac{1}{P(D)}e^{mx}$ por tanto

$$\frac{1}{P(D)}\,e^{mx} = \frac{e^{mx}}{P(M)}$$

Ej.4.5.11.- Hallar una solución particular de $(D^3 - 2D^2 - 5D + 6)y = e^{4x}$

$(D^3 - 2D^2 - 5D + 6)y = (D - 1)(D - 3)(D + 2)y = e^{4x}$ por tanto

$y = \frac{1}{(D-1)(D-3)(D+2)}\,e^{4x}$ Obsérvese que $P(4) = (4-1)(4-3)(4+2) \neq 0$

entonces $y = \frac{1}{(4-1)(4-3)(4+2)}\,e^{4x} = \frac{e^{4x}}{18}$

Ej.4.5.12.- Hallar la solución general de $(D^3 - 2D^2 - 5D + 6)y = e^{3x}$

Como $P(3) = (3-1)(3-3)(3+2) = 0$ entonces no se puede aplicar el corolario4.5.1. para hallar la solución particular pues

$$y_c = c_1e^{x} + c_2e^{3x} + c_3e^{-2x}$$

entonces hacemos lo siguiente:

$$y_p = \frac{1}{(D-1)(D-3)(D+2)}e^{3x} = \frac{1}{D-3}\left[\frac{1}{(D-1)(D+2)}\,e^{3x}\right] = \frac{1}{D-3}\left[\frac{e^{3x}}{2x5}\right] = \frac{1}{10}\left[\frac{1}{D-3}\,e^{3x}\right]$$

$$= \frac{1}{10}\,e^{3x}\int e^{-3x}e^{3x}dx = \frac{1}{10}\,xe^{3x}$$

Teorema.4.5.4.- Si m es constante y F(x) es diferenciable entonces

$$D^n\left[e^{mx}F(x)\right] = e^{mx}(D + m)^nF(x)$$

Prueba. Por inducción

Para n = 1 $\quad D\left[e^{mx}F(x)\right] = e^{mx}DF(x) + me^{mx}F(x) = e^{mx}(D+m)F(x)$ se cumple

Supongamos que lo que vamos a demostrar se cumple para n = k y demostremos que se cumple tambien para n = k+1

Supongamos que para n = k $D^k\left[e^{mx}F(x)\right] = e^{mx}(D+m)^kF(x)$ se cumple

$$D^{k+1}\left[e^{mx}F(x)\right] = D\left\{D^k\left[e^{mx}F(x)\right]\right\} = D\left[e^{mx}(D+m)^kF(x)\right]$$

$$= e^{mx}D(D+m)^kF(x) + me^{mx}(D+m)^kF(x)$$

$$= e^{mx}(D+m)(D+m)^kF(x)$$

$$= e^{mx}(D+m)^{k+1}F(x)$$

Este resultado es muy útil para hallar derivadas de cualquier orden de la función $e^{mx}F(x)$ donde F(x) es cualquiera pero diferenciable.

Teorema.4.5.5.-

$$P(D)e^{mx}F(x) = e^{mx}P(D+m)F(x)$$

Prueba. $P(D)e^{mx}F(x) = \sum_{i=0}^{n} a_{n-i}D^ie^{mx}F(x) = \sum_{i=0}^{n} a_{n-i}e^{mx}(D+m)^iF(x)$

$$= e^{mx}\sum_{i=0}^{n} a_{n-i}(D+m)^iF(x) = e^{mx}P(D+m)F(x)$$

Este resultado es conocido con el nombre de teorema del desplazamiento de operadores.

Corolario.4.5.2.- $\quad \frac{1}{P(D)}e^{mx}F(x) = e^{mx}\,\frac{1}{P(D+m)}\,F(x)$ donde F(x) es una función diferenciable.

Prueba. $e^{mx}\frac{1}{P(D+m)}F(x)$ es solución de $P(D)y = e^{mx}F(x)$ pruebelo!

pero $\quad y = \frac{1}{P(D)}e^{mx}F(x)$ por tanto $\quad \frac{1}{P(D)}e^{mx}F(x) = e^{mx}\,\frac{1}{P(D+m)}\,F(x)$

Este resultado se conoce con el nombre de teorema inverso del desplazamiento de operadores.

Ej.4.5.13.- Resolver $\qquad (D^2 - 4)y = x^2e^{3x}$

De $(D^2 - 4)y = 0$ obtenemos $y_c = c_1e^{2x} + c_2e^{-2x}$

$$y_p = \frac{1}{D^2-4}\,x^2e^{3x} = e^{3x}\,\frac{1}{(D+3)^2-4}\,x^2 = e^{3x}\,\frac{1}{D^2+6D+5}\,x^2$$

$$= e^{3x}\left(\frac{1}{5} - \frac{6}{25}D + \frac{31}{125}D^2 + \ldots\ldots\right)x^2 = e^{3x}\left(\frac{x^2}{5} - \frac{12}{25}\,x - \frac{62}{125}\right)$$

En este ejercicio se utilizó el procedimiento de dividir 1 por P(D) lo que se justificará mas adelante.

Solución general $y = y_c + y_p$

Teorema.4.5.6.- Si $P(D^2)$ es un operador polinomial, entonces

a) $P(D^2)\operatorname{sen}(ax+b) = \operatorname{sen}(ax+b)P(-a^2)$

b) $P(D^2)\cos(ax+b) = \cos(ax+b)P(-a^2)$

Prueba. b) Sea $y = \cos(ax+b)$ entonces $D^2y = -a^2\cos(ax+b)$, $D^4y = (-a^2)^2\cos(ax+b)$

..............., $D^{2p}y = (-a^2)^p\cos(ax+b)$

por tanto

$$P(D^2)\cos(ax+b) = \sum_{i=0}^{n} a_{n-i}D^{2i}\cos(ax+b)$$
$$= \sum_{i=0}^{n} a_{n-i}(-a^2)^i\cos(ax+b)$$
$$= \cos(ax+b)\sum_{i=0}^{n} a_{n-i}(-a^2)^i$$
$$= \cos(ax+b)\ P(-a^2)$$

Corolario.4.5.3.- Si $P(-a^2) \neq 0$ entonces

a) $\dfrac{1}{P(D^2)}\operatorname{sen}(ax+b) = \operatorname{sen}(ax+b)\ \dfrac{1}{P(-a^2)}$

b) $\dfrac{1}{P(D^2)}\cos(ax+b) = \cos(ax+b)\ \dfrac{1}{P(-a^2)}$

Prueba. b) $\cos(ax+b)\ \dfrac{1}{P(-a^2)}$ es solución de $P(D^2)y = \cos(ax+b)$ pruebelo!

pero sabemos que $y = \dfrac{1}{P(D^2)}\cos(ax+b)$ por tanto

$$\cos(ax+b)\ \frac{1}{P(-a^2)} = \frac{1}{P(D^2)}\cos(ax+b)$$

a) Se demuestra en forma similar.

Nota.4.5.3.- Los resultados del corolario anterior no son aplicables a las ecuaciones $P(D)y = \cos(ax+b)$ o $P(D)y = \operatorname{sen}(ax+b)$

Ej.4.5.14.- Resolver $(D^2 + 3D - 4)y = \operatorname{sen} 2x$

De la expresión $(D^2 + 3D - 4)y = 0$

obtenemos

$$y_c = c_1e^x + c_2e^{-4x}$$

Una integral particular es

$$y_p = \frac{1}{D^2 + 3D - 4}\operatorname{sen} 2x = \frac{1}{(D - 1)(D + 4)}\operatorname{sen} 2x$$

Obsérvese que aquí el operador no es de la forma $\dfrac{1}{P(D^2)}$ y por tanto no se puede aplicar el corolario.4.5.3. no obstante se puede aplicar uno de los siguientes procedimientos:

a) $y_p = \frac{1}{(D-1)(D+4)}$ sen $2x = \frac{(D+1)(D-4)}{(D^2-1)(D^2-16)}$ sen $2x = \frac{1}{100}(D^2-3D-4)$sen $2x$

$= \frac{1}{100}(-4\text{sen } 2x - 6\cos 2x - 4\text{sen } 2x) = -\frac{1}{50}(4\text{sen } 2x + 3\cos 2x)$

b) $y = \frac{1}{D^2 + 3D - 4}$ sen $2x = \frac{1}{-4 + 3D - 4}$ sen $2x = \frac{1}{3D - 8}$ sen $2x$

$= \frac{3D + 8}{9D^2 - 64}$ sen $2x = -\frac{1}{100}(3D + 8)$sen $2x = -\frac{1}{100}(6\cos 2x + 8\text{sen } 2x)$

$= -\frac{1}{50}(4\text{sen } 2x + 3\cos 2x)$

Solución general

$$y = c_1e^x + c_2e^{-4x} - \frac{1}{50}(4\text{sen } 2x + 3\cos 2x)$$

Ej.4.5.15.- Resolver $(D^4 + 10D^2 + 9)y = \cos(2x + 3)$

De la expresión $(D^4 + 10D^2 + 9)y = (D^2 + 9)(D^2 + 1)y = 0$ obtenemos

$y_c = c_1\cos x + c_2\text{sen } x + c_3\cos 3x + c_4\text{sen } 3x$

además,

$y_p = \frac{1}{(D^2 + 1)(D^2 + 9)}\cos(2x + 3) = \frac{1}{(-3)(5)}\cos(2x + 3)$

$= -\frac{1}{15}\cos(2x + 3)$

luego la solución general es $y = y_c + y_p$

Analicemos ahora como actúa el operador $\frac{1}{P(D)}$ sobre el polinomio

$P_p(x) = A_0x^p + A_1x^{p-1} + \ldots\ldots\ldots\ldots + A_p$

Dividamos formalmente 1 entre el polinomio $P(D) = a_n + a_{n-1}D + \ldots + a_0D^n \quad a_0 \neq 0$

si el cociente es $Q_p(D) = b_0 + b_1D + \ldots + b_pD^p$ y el residuo es

$R(D) = c_{p+1}D^{p+1} + c_{p+2}D^{p+2} + \ldots\ldots + c_{p+n}D^{p+n}$ es porque

$$P(D)Q_p(D) + R(D) = 1$$

esta identidad se cumple para polinomios ordinarios,pero como el conjunto de los polinomios ordinarios y el de los operacionales son isomorfos para las operaciones de suma y producto,la igualdad tambien vale para los polinomios operacionales.

Aplicando ambos miembros de la anterior igualdad al polinomio

$P_p(x) = A_0x^p + A_1x^{p-1} + \ldots\ldots + A_p$

se tiene

$\left[P(D)Q_p(D) + R(D)\right](A_0x^p + A_1x^{p-1} + \ldots + A_p) = A_0x^p + A_1x^{p-1} + \ldots + A_p$

pero $R(D)(A_0x^p + A_1x^{p-1} + \ldots + A_p) = 0$

entonces

$\left[P(D)Q_p(D)\right](A_0x^p + A_1x^{p-1} + \ldots + A_p) = A_0x^p + A_1x^{p-1} + \ldots + A_p$

luego $Q_p(D)(A_0x^p + A_1x^{p-1} + \dots + A_p) = \dfrac{1}{P(D)}(A_0x^p + A_1x^{p-1} + \dots + A_p)$

o sea que $Q_p(D)(A_0x^p + A_1x^{p-1} + \dots\dots + A_p)$

es solución de la E.D.

$$P(D)y = A_0x^p + A_1x^{p-1} + \dots\dots + A_p$$

Ej.4.5.16.- Resolver $y'' + y = x^2 - x + 2$

De la expresión $y'' + y = 0$ obtenemos $y_c = c_1\cos x + c_2\,\text{sen}\, x$

por otro lado

$$y_p = \frac{1}{D^2+1}(x^2 - x + 2) = (1 - D^2)(x^2 - x + 2) = x^2 - x + 2 - 2$$
$$= x^2 - x$$

por lo que la solución general es $y = y_c + y_p$

Ej.4.5.17.- Resolver $y'' + 6y' + 18y = 108x^2e^{-3x}\cos 3x$

De la expresión $y'' + 6y' + 18y = 0$ obtenemos

$y_c = Ae^{-3x}\cos 3x + Be^{-3x}\,\text{sen}\, 3x$

además $y_p = (6x^3 - x)\,\text{sen}\, 3x + 3x^2\cos 3x$

solución general $y = y_c + y_p$

Ej.4.5.18.- Resolver $y'' + 2y' + 2y = x^2e^{-x}$

De la expresión $y'' + 2y' + 2y = 0$ obtenemos

$y_c = Ae^{-x}\cos 2x + Be^{-x}\,\text{sen}\, 2x$

además $y_p = \dfrac{1}{D^2 + 2D + 2}x^2e^{-x} = e^{-x}\dfrac{1}{(D+1)^2+2(D-1)+2}x^2 = e^{-x}\dfrac{1}{D^2+1}x^2$

$$= e^{-x}(1-D^2)x^2 = e^{-x}(x^2 - 2)$$

solución general $y = Ae^{-x}\cos 2x + Be^{-x}\,\text{sen}\, 2x + e^{-x}(x^2 - 2)$

Ej.4.5.19.- Resolver $y'' + y = x\cos x$

$y_c = c_1\cos x + c_2\,\text{sen}\, x$ que se obtiene de $(D^2 + 1)y = 0$

para encontrar la solución particular partimos de la E.D.

$(D^2 + 1)y = xe^{ix}$ y luego tomamos la parte real de la solución encontrada. $y_p = \dfrac{1}{D^2+1}xe^{ix} = e^{ix}\dfrac{1}{D(D+2i)}x = e^{ix}\dfrac{1}{D}\left(\dfrac{1}{2i} - \dfrac{D}{4}\right)x = e^{ix}\dfrac{1}{D}\left(\dfrac{x}{2i} - \dfrac{1}{4}\right)$

$$= e^{ix}\left(\frac{x^2}{4i} - \frac{x}{4}\right) = (\cos x + i\,\text{sen}\, x)\left(\frac{x^2}{4i} - \frac{x}{4}\right)$$

tomando la parte real encontramos

$y_p = \dfrac{x^2}{4}\text{sen}\, x + \dfrac{x}{4}\cos x$

luego la solución buscada es $y = y_c + y_p$

EJERCICIOS 4.5.

Resolver los siguientes ejercicios

1) $y^{(5)} - y''' = 210x^4 - 240x^3 - 600x^2 + 480x - 1920$

2) $y^{(4)} - 6y''' + 13y'' - 12y' + 4y = 2e^{x} - 4e^{2x}$

3) $y''' + y'' - y' - y = (2x^2 + 4x + 8)\cos x + (6x^2 + 8x + 12)\operatorname{sen} x$

4) $y^{(4)} - 3y''' + 3y'' - y' = 6x - 20 - 120x^2e^{x}$

5) $y^{(6)} - 12y^{(5)} + 63y^{(4)} - 184y''' + 315y'' - 300y' + 125y = e^{2x}(48\cos x + 96\operatorname{sen} x)$

6) $y''' + y' = \operatorname{tg} x \qquad 0 < x < \pi/2$

7) $y^{(4)} + 2y'' + y = \sec^3 x \qquad 0 < x < \pi/2$

8) $y^{(4)} - 4y''' + 6y'' - 4y' + y = e^{x}/x^{n}$ x mayor que cero

9) $y''' - 3y'' + 3y' - y = e^{x}\operatorname{Ln} x / x$ x mayor que cero $x > 0$

10) $y''' - 6y'' + 11y' - 6y = \dfrac{e^{3x}}{e^{2x} + 1}$

11) $y''' + 3y'' + 3y' + y = e^{-x}\operatorname{Ln} x$ x mayor que cero

4.6. LA ECUACION DE OSCILACION

Una de las aplicaciones de las E.D. Lineales do segundo roden con coeficientes constantes es la llamada Ecuación de Oscilación que tiene la siguiente forma

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2k\frac{dx}{dt} + w^2x = E\cos qt$$

y es de gran importancia en la ingeniería. Esta E.D. es la ecuación del movimiento de una partícula en la recta donde el término w^2x representa la aceleración dirigida hacía el origen, El término $2k\frac{dx}{dt}$ representa un retardamiento debido a un amortiguamiento por fricción, el término $E\cos qt$ (o $E\operatorname{sen} qt$) es la aceleración producida por una fuerza periódica aplicada y cuando está presente se dice que se tiene una aceleración forzada.

La Ecuación de Oscilación se puede resolver por los métodos ya vistos y en ella se presentan varios casos que a continuación estudiaremos.

a) OSCILACION LIBRE SIN AMORTIGUAMIENTO

Lo anterior quiere decir que la E.D. se reduce a

$$\frac{d^2x}{dt^2} + w^2x = 0$$

que es la E.D. del Movimiento Armónico Simple cuya solución es

$$x = A\cos wt + B\operatorname{sen} wt$$

o

$$x = C\cos(wt - \emptyset)$$

donde $A, B, C, \emptyset$ son constantes que dependen de las condiciones iniciales pues si $t = 0$, $x = a$ y $\frac{dx}{dt} = u$ las constantes se determinan fácilmente y la solución es

$$x = a\cos wt + \frac{u}{w}\operatorname{sen} wt$$

o tambien

$$x = \left(a^2 + \frac{u^2}{w^2}\right)^{1/2}\cos(wt - \emptyset) \quad \text{donde} \quad \operatorname{tg}\emptyset = \frac{u}{aw}$$

por tanto el movimiento es periódico y su período es $\frac{2\pi}{w}$ con amplitud $\left(a^2 + \frac{u^2}{w^2}\right)^{1/2}$

b) OSCILACION FORZADA SIN AMORTIGUAMIENTO

En este caso la E.D. puede escribirse como

$$\frac{d^2x}{dt^2} + w^2x = E\cos qt$$

Entonces una solución particular de esta ecuación es

$$x = \frac{E}{D^2 + w^2}\cos qt = \frac{E}{w^2 - q^2}\cos qt \qquad \text{si } q \neq w$$

Si $q = w$ una integral particular es la parte real de

$$\frac{E}{D^2 + w^2}e^{iwt} = Ee^{iwt}\frac{1}{D(D + 2iw)} = \frac{E}{2iw}te^{iwt}$$

así pues una integral particular es

$$x = \frac{E}{2w} \text{ tsen } wt$$

En resumen, la solución es

$$x = C\cos(wt - \phi) + \frac{E}{w^2 - q^2}\cos qt \qquad \text{si } q \neq w$$

$$x = C\cos(wt - \phi) + \frac{E}{2w}\text{tsen } wt \qquad \text{si } q = w$$

Observe que si q es aproximadamente igual a w, la amplitud $\frac{E}{w^2 - q^2}$ será muy grande y se tendrá resonancia que ocurre cuando la amplitud tiende a infinito.

c) OSCILACION LIBRE CON AMORTIGUAMIENTO

Para esta situación la E.D. se reduce a

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2k\frac{dx}{dt} + w^2x = 0$$

entonces la ecuación auxiliar es

$$m^2 + 2km + w^2 = 0$$

cuyas raíces son $m = -k \pm (k^2 - w^2)^{1/2}$

si w esmenor o igual que k la solución es

$$x = Ae^{-at} + Be^{-bt}$$

o

$$x = (A + Bt)e^{-kt}$$

siendo a y b positivas.

Como se ve, x disminuye rápidamente sin escilar.

En consecuencia, hay oscilación únicamente si w es mayor que k y es conveniente escribir

$$w^2 = k^2 + p^2 \qquad \text{p real positivo}$$

la ecuación auxiliar tiene entonces las raíces

$$m = -k \pm ip$$

y la solución de la E.D. es

$$x = e^{-kt}(A\cos pt + B\text{sen } pt)$$

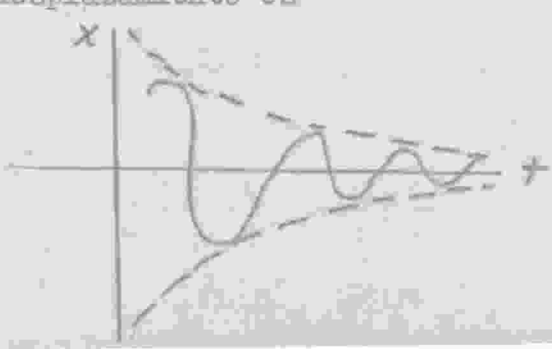
o

$$x = Ce^{-kt}\cos(pt + \phi)$$

siendo A, B, C y ϕ constantes que dependen de las condiciones iniciales.

El movimiento tiene período $2\pi/p$ pero la amplitud disminuye exponencialmente hacia cero.

La gráfica del desplazamiento es



d) OSCILACION FORZADA CON AMORTIGUAMIENTO

Es el caso más general de la ecuación de Oscilación que puede escribirse como

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2k\frac{dx}{dt} + (k^2 + p^2)x = E\cos qt$$

cuya solución particular es

$$y_p = \frac{E}{D^2 + 2kD + (k^2 + p^2)}\cos qt = \frac{E}{k^2 + p^2 - q^2 + 2kD}\cos qt$$

$$= \frac{E}{(w^2 - q^2)^2 + 4k^2q^2}\cos(qt - \emptyset) \quad \text{siendo } \emptyset = tg^{-1}\left(\frac{2kq}{w^2 - q^2}\right)$$

esta es la oscilación forzada siendo la libre $Ce^{-kt}\cos(pt + \theta)$

Si el período de oscilación forzada es el mismo período natural de la oscilación o sea si $q = w$ la oscilación forzada es

$$x = \frac{E}{2kw}\,\text{sen}\ wt$$

y la amplitud aunque puede ser grande no aumenta indefinidamente.